Федеральное агентство образования Российской Федерации

Тульский государственный университет

РУДКЕВИЧ Е.А.

ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

(методы решения задач)

Учебное пособие

Тула 2004

УДК 517.5

Рудкевич Е. А.
Функции комплексного переменного и операционное исчисление (методы решения задач). Учебн. пособие/ Е.А. Рудкевич; Тул. Гос. Ун-т. Тула, 2004. - с.- 64.

В учебном пособии подробно разобраны методы решения задач из типового расчета по теории функций комплексного переменного и операционному исчислению из книги В.Ф. Чудесенко "Сборник заданий по специальным курсам высшей математики (Типовые расчеты)". К каждой задаче или группе задач предпослано теоретическое введение, в котором указаны все формулы, необходимые, чтобы выполнить задание, подробно разобраны примеры. Нумерация задач соответствует указанному сборнику заданий. Пособие будет полезно всем студентам, выполняющим типовой расчет по указанной теме, а также преподавателям при проведении практических занятий по теории функций комплексного переменного.

Печатается по решению библиотечно-издательского совета Тульского государственного университета.

Рецензенты: Кафедра математического анализа Тульского государственного педагогического университета
Доктор физ.-мат.наук, профессор Тульского государственного педагогического университета Н.М. Добровольский.

Введение.

Комплексные числа и действия над ними изучались ранее в курсе высшей математики. Напомним, что комплексные числа можно представлять в различной форме.

Алгебраическая форма:

$$z = x + iy,$$

где x и y — действительные числа, причем $x = \operatorname{Re} z$ называется действительной частью комплексного числа, а $y = \operatorname{Im} z$ — мнимой частью.

Тригонометрическая форма:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

где $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ — модуль комплексного числа, $\varphi = \operatorname{Arg} z$ — аргумент комплексного числа. Угол φ определен неоднозначно, с точностью до слагаемого, кратного 2π:

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$\arg z$ есть главное значение аргумента, определяемое условием

$$-\pi < \arg z \leqslant \pi.$$

Показательная форма:

$$z = re^{i\varphi}.$$

Задача 1.

Корень n-ой степени из комплексного числа z имеет n различных значений, которые находятся по формуле

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Точки, соответствующие значениям $\sqrt[n]{z}$, являются вершинами правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $R = \sqrt[n]{|z|}$ с центром в начале координат.

Пример. Найти все значения корня $\sqrt[4]{1-i}$.

Решение. Представим комплексное число $z=1-i$ в тригонометрической форме:

$$|z|=\sqrt{(1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}.$$

$$\begin{cases} \cos\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\varphi=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \end{cases}$$

то есть $\varphi=-\dfrac{\pi}{4}$.

Получаем:

$$z=1-i=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right.$$

Следовательно, $\sqrt[4]{1-i}$ имеет 4 значения

$$z_k=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{-\pi/4+2\pi k}{4}+i\sin\frac{-\pi/4+2\pi k}{4}\right).$$

Полагая $k=0,1,2,3$, находим

$$\begin{aligned} z_0&=\sqrt[8]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{16}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{16}\right)\right), \\ z_1&=\sqrt[8]{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{16}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{16}\right)\right), \\ z_2&=\sqrt[8]{2}\left(\cos\left(\frac{15\pi}{16}\right)+i\sin\left(\frac{15\pi}{16}\right)\right), \\ z_3&=\sqrt[8]{2}\left(\cos\left(\frac{23\pi}{16}\right)+i\sin\left(\frac{23\pi}{16}\right)\right)= \\ &=\sqrt[8]{2}\left(\cos\left(-\frac{9\pi}{16}\right)+i\sin\left(-\frac{9\pi}{16}\right)\right). \end{aligned}$$

Здесь мы преобразовали значение аргумента к его главному значению.

Задачи 2, 3.

При вычислении значений различных функций полезно использовать их выражения через функции e^z и $\ln z$. При этом используем следующие формулы:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y),$$
$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\arg z + 2\pi k i, \quad i \in \mathbb{Z}.$$

Тогда легко найти значения следующих функций.

Степенная	$z^a = e^{a \operatorname{Ln} z}$
Показательная	$a^z = e^{z \operatorname{Ln} a}$
Тригонометрические	$\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$
	$\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$
	$\operatorname{tg} z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$; $\operatorname{ctg} z = \dfrac{\cos z}{\sin z}$
Гиперболические	$\operatorname{sh} z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$
	$\operatorname{ch} z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$
	$\operatorname{th} z = \dfrac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}$; $\operatorname{cth} z = \dfrac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}$
Обратные	$\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2})$
тригонометрические	$\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$
	$\operatorname{Arctg} z = -\dfrac{i}{2} \operatorname{Ln} \dfrac{1 + iz}{1 - iz}$
	$\operatorname{Arcctg} z = -\dfrac{i}{2} \operatorname{Ln} \dfrac{z + i}{z - i}$
Обратные	$\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 + 1})$
гиперболические	$\operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$
	$\operatorname{Arth} z = \dfrac{1}{2} \operatorname{Ln} \dfrac{z + 1}{1 - z}$
	$\operatorname{Arcth} z = \dfrac{1}{2} \operatorname{Ln} \dfrac{z + 1}{z - 1}$

Следует обратить внимание на то, что корни, входящие в эти формулы, как обычно, принимают два значения.

Пример 1.

$$\operatorname{ch}(2-3i) = \frac{e^{2-3i}+e^{-2+3i}}{2} =$$
$$= \frac{1}{2}\left(e^2\left(\cos(-3)+i\sin(-3)\right)+e^{-2}\left(\cos 3+i\sin 3\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(e^2\cos 3 - ie^2\sin 3 + e^{-2}\cos 3 + ie^{-2}\sin 3\right) =$$
$$= \cos 3\cdot\frac{e^2+e^{-2}}{2} - i\sin 3\cdot\frac{e^2-e^{-2}}{2} = \cos 3\operatorname{ch}2 - i\sin 3\operatorname{sh}2.$$

Пример 2.

$$2^i = e^{i\operatorname{Ln}2}.$$

Так как

$$\operatorname{Ln}2 = \ln 2 + 2\pi k i,$$

то

$$2^i = e^{i(\ln 2+2\pi k i)} = e^{i\ln 2-2\pi k} = \ = e^{-2\pi k}(\cos\ln 2 + i\sin\ln 2).$$

Пример 3.

$$z = \operatorname{Arcsin}\frac{\pi}{3}i = -i\operatorname{Ln}\left(-\frac{\pi}{3}\pm\sqrt{1+\frac{\pi^2}{9}}\right).$$

Учтем, что $\sqrt{1+\frac{\pi^2}{9}} > \frac{\pi}{3}$, поэтому

$$\alpha_1 = -\frac{\pi}{3}+\sqrt{1+\frac{\pi^2}{9}} > 0 \quad \text{и} \quad \arg\alpha_1 = 0,$$
$$\alpha_2 = -\frac{\pi}{3}-\sqrt{1+\frac{\pi^2}{9}} < 0 \quad \text{и} \quad \arg\alpha_2 = \pi.$$

Получаем два случая:

$$1)\ z_1 = -i\,\mathrm{Ln}\left(-\frac{\pi}{3} + \sqrt{1+\frac{\pi^2}{9}}\right) =$$

$$= -i\left(\ln\left(-\frac{\pi}{3} + \sqrt{1+\frac{\pi^2}{9}}\right) + 2\pi k i\right) =$$

$$= -i\ln\left(-\frac{\pi}{3} + \sqrt{1+\frac{\pi^2}{9}}\right) + 2\pi k, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

$$2)\ z_2 = -i\,\mathrm{Ln}\left(-\frac{\pi}{3} - \sqrt{1+\frac{\pi^2}{9}}\right) =$$

$$= -i\left(\ln\left(\frac{\pi}{3} + \sqrt{1+\frac{\pi^2}{9}}\right) + \pi i + 2\pi k i\right) =$$

$$= -i\ln\left(\frac{\pi}{3} + \sqrt{1+\frac{\pi^2}{9}}\right) + \pi + 2\pi k, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Пример 4.

$$z = \mathrm{Arctg}(1+i) = -\frac{i}{2}\,\mathrm{Ln}\,\frac{1+i(1+i)}{1-i(1+i)} = -\frac{i}{2}\,\mathrm{Ln}\,\frac{i}{2-i} =$$

$$= -\frac{i}{2}\,\mathrm{Ln}\,\frac{i(2+i)}{4+1} = -\frac{i}{2}\,\mathrm{Ln}\left(-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i\right).$$

Для комплексного числа $\alpha = -\dfrac{1}{5} + \dfrac{2}{5}i$ имеем:

$$|\alpha| = \sqrt{\frac{1}{25}+\frac{4}{25}} = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$\arg\alpha = \pi + \mathrm{arctg}(-2) = \pi - \mathrm{arctg}\,2.$$

Отсюда получаем

$$z = -\frac{i}{2}\left(\ln\frac{1}{\sqrt{5}} + \pi i - i\,\mathrm{arctg}\,2 + 2\pi k i\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,2 + \pi k + \frac{i}{4}\ln 5, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Задача 4.

Комплексное число $z = x + iy$ изображается в плоскости XOY точкой M с координатами (x, y). Модуль $|z| = r$ и аргумент $\varphi = \arg z$ соответствуют полярным координатам точки M.

Полезно помнить, что неравенство

$$|z - z_0| \leqslant R$$

задает круг с центром в точке z_0 радиуса R. Неравенство $\operatorname{Re} z \geqslant a$ задает полуплоскость, расположенную правее прямой $x = a$, а неравенство $\operatorname{Im} z \geqslant b$ — полуплоскость, расположенную выше прямой $y = b$. Кроме того, система неравенств $\varphi_1 \leqslant \arg z \leqslant \varphi_2$ задает угол между лучами $\varphi = \varphi_1$ и $\varphi = \varphi_2$, выходящими из начала координат.

Пример. Нарисовать область, заданную неравенствами:

$$\begin{cases} 1 < |z + i| < 2, \\ -\dfrac{\pi}{4} < \arg z < \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

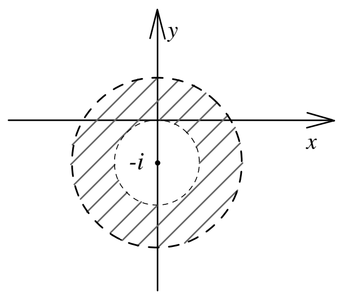

Рис. 1

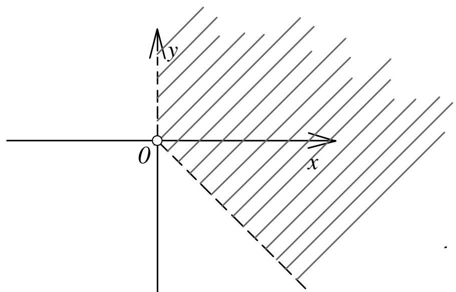

Рис. 2

Решение.

Первому неравенству соответствует кольцо с центром в точке $-i$ и двумя радиусами 1 и 2, окружности в область не входят (рис. 1).

Второму неравенству соответствует угол между лучами $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ (биссектриса 4 координатного угла) и $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (положительное направление оси OY). Сами лучи в область не входят (рис. 2).

Искомая область является пересечением двух полученных областей (рис. 3).

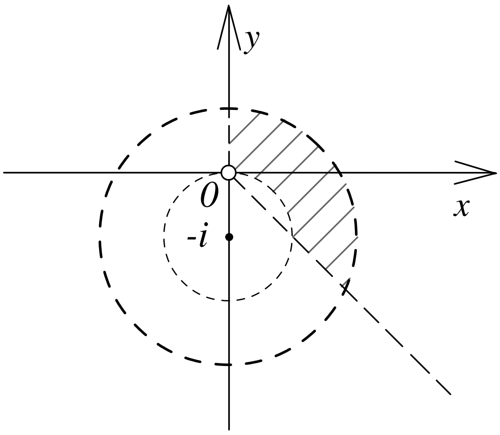

Рис. 3

Задача 5.

Уравнение вида $z = x(t) + iy(t)$ определяет на комплексной плоскости кривую, параметрические уравнения которой имеют вид

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$$

Исключая параметр t из этих уравнений, получаем уравнение кривой в виде $F(x, y) = 0$.

При исключении параметра t бывают полезны формулы вида:

$$1 + \operatorname{tg}^2 t = \frac{1}{\cos^2 t} \tag{1}$$

$$\operatorname{ctg}^2 t + 1 = \frac{1}{\sin^2 t} \tag{2}$$

$$1 - \operatorname{th}^2 t = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t} \tag{3}$$

$$\operatorname{cth}^2 t - 1 = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 t} \tag{4}$$

$$\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1 \tag{5}$$

Пример 1.

$$z = t^2 + 4t + 2 + i(t^2 + 4t - 7).$$

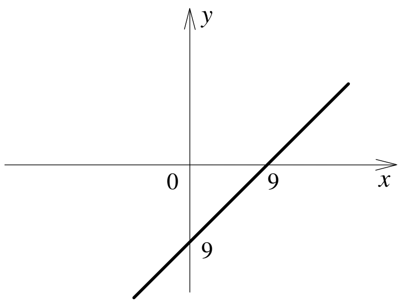

Рис. 4

Получаем параметрические уравнения

$$\begin{cases} x = t^2 + 4t + 2, \\ y = t^2 + 4t - 7. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} x - 2 = t^2 + 4t, \\ y + 7 = t^2 + 4t. \end{cases}$$

Отсюда $x - 2 = y + 7$, или

$$y = x - 9.$$

Это уравнение прямой (рис.4).

Пример 2.

$$z = \operatorname{cth} 2t + \frac{3i}{\operatorname{sh} 2t}.$$

Используем формулу (4). Так как

$$\begin{cases} \operatorname{cth} 2t = x, \\ \dfrac{1}{\operatorname{sh} 2t} = \dfrac{y}{3}, \end{cases}$$

то

$$x^2 - 1 = \frac{y^2}{9},$$

или

$$x^2 - \frac{y^2}{9} = 1.$$

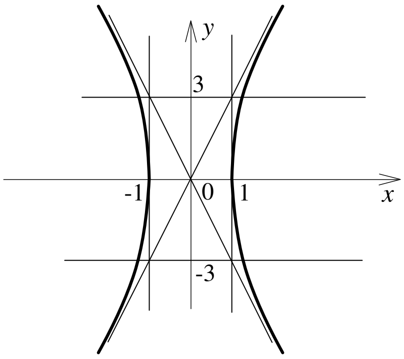

Рис. 5

Это уравнение гиперболы с полуосями $a = 1$ и $b = 3$ (рис. 5).

Пример 3.

$$z = 2e^{it} + \frac{1}{3e^{it}}.$$

Преобразуем выражение для z:

$$z = 2(\cos t + i\sin t) + \frac{1}{3}(\cos t - i\sin t) = \frac{7}{3}\cos t + i\frac{5}{3}\sin t.$$

Тогда

$$\begin{cases} x = \dfrac{7}{3}\cos t, \\ y = \dfrac{5}{3}\sin t. \end{cases}$$

И так как $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, то

$$\left(\frac{3}{7}x\right)^2 + \left(\frac{3}{5}y\right)^2 = 1.$$

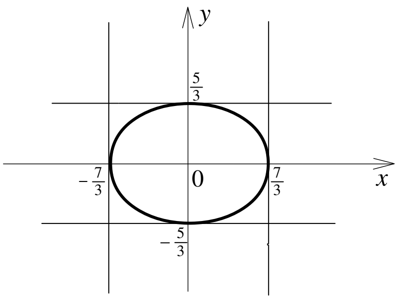

Рис. 6

В результате получим уравнение кривой

$$\frac{9x^2}{49} + \frac{9y^2}{25} = 1.$$

Это эллипс с полуосями $a = \frac{7}{3}$ и $b = \frac{5}{3}$ (рис. 6).

Задача 6.

Пусть $f = u(x, y) + iv(x, y)$ — аналитическая функция в некоторой области U. Тогда для нее в этой области выполняются условия Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \tag{6}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{7}$$

При решении задач, для того, чтобы перейти от переменных x и y к комплексной переменной z, полезно иметь ввиду соотношения вида:

$$\begin{gathered} z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy, \\ z^3 = x^3 - 3xy^2 + i(x^2y - y^3), \\ e^z = e^x(\cos y + i\sin y), \\ \operatorname{ch} z = \operatorname{ch} x \cos y + i \operatorname{sh} x \sin y, \\ \frac{1}{z} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}. \end{gathered}$$

Пример. Найти аналитическую функцию $f(z)$ по известной ее мнимой части $v(x, y) = 3x + 2xy$ при условии $f(-i) = 2$.

Решение. Находим:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 3 + 2y.$$

Из (6) следует, что $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x$. Тогда

$$u(x, y) = \int 2x\,dx = x^2 + \varphi(y).$$

Теперь воспользуемся соотношением (7):

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \varphi'(y) = -(3 + 2y).$$

Интегрируем полученное равенство:

$$\varphi(y) = -\int (3+2y)\,dy = -3y - y^2 + C.$$

Итак, $u(x,y) = x^2 - 3y - y^2 + C$. Поэтому

$$f(z) = x^2 - 3y - y^2 + C + i(3x + 2xy).$$

По условию $f(-i) = 2$. Но тогда $x = 0$, $y = -1$. Поэтому

$$f(-i) = 3 - 1 + C + i \cdot 0 = 2 + C = 2.$$

Отсюда $C = 0$. Получаем:

$$\begin{aligned} f(z) &= x^2 - 3y - y^2 + i(3x + 2xy) = \\ &= (x^2 - y^2 + 2xyi) + 3i(x + iy) = \\ &= z^2 + 3iz. \end{aligned}$$

Задача 7.

Пусть однозначная функция $f(z)$ определена и непрерывна в области D, а C — кусочно-гладкая замкнутая или незамкнутая ориентированная кривая, лежащая в D. Пусть, как обычно, $z = x + iy$, $f(z) = u + iv$, где $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ — действительные функции переменных x и y.

Вычисление интеграла от функции $f(z)$ комплексного переменного z сводится к вычислению обычных криволинейных интегралов, а именно,

$$\int\limits_C f(z)\,dz = \int\limits_C u\,dx - v\,dy + i\int\limits_C v\,dx + u\,dy \tag{8}$$

Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D, содержащей точки z_0 и z_1, то имеет место формула Ньютона–Лейбница

$$\int\limits_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz = \Phi(z_1) - \Phi(z_0) = \Phi(z)\Big|_{z_0}^{z_1}, \tag{9}$$

где $\Phi(z)$ — какая-либо первообразная для функции $f(z)$, т.е. $\Phi'(z) = f(z)$ в области D.

В интегралах от функций комплексного переменного можно производить замену переменной и интегрирование по частям аналогично тому, как это делается при вычислении интегралов от функций действительного переменного.

Заметим также, что, если путь интегрирования является частью полупрямой, выходящей из точки z_0, или частью окружности с центром в точке z_0, то полезно делать замену переменной вида $z - z_0 = \rho e^{i\varphi}$. В первом случае $\varphi = \mathrm{const}$, а ρ — действительная переменная интегрирования; во втором случае $\rho = \mathrm{const}$, а φ — действительная переменная интегрирования.

Пример 1. Вычислить $\int\limits_C (1+i-2\bar{z})\,dz$ по параболе $y = x^2$ от точки $z_1 = 0$ до точки $z_2 = 1+i$.

Решение.

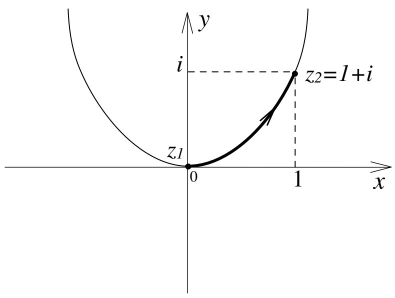

Рис. 7

Перепишем подынтегральную функцию в виде:

$$f(z) = 1+i-2\bar{z} = \\ = 1+i-2(x-iy) = \\ = (1-2x)+i(1+2y).$$

Тогда $u = 1-2x$, $v = 1+2y$.

Применяем формулу (8):

$$\int\limits_C (1+i-2\bar{z})\,dz =$$

$$= \int\limits_C (1-2x)\,dx - (1+2y)\,dy + i\int\limits_C (1+2y)\,dx + (1-2x)\,dy.$$

Так как $y = x^2$, то $dy = 2x\,dx$, $x \in [0;1]$. Поэтому

$$\int_C (1 + i - 2\bar{z})\,dz =$$

$$= \int_0^1 ((1-2x) - (1+2x^2)2x)\,dx + i\int_0^1 ((1+2x^2) + (1-2x)2x)\,dx =$$

$$= \int_0^1 (-4x^3 - 4x + 1)\,dx + i\int_0^1 (-2x^2 + 2x + 1)\,dx =$$

$$= (-x^4 - 2x^2 + x)\Big|_0^1 + i\,(-\frac{2}{3}x^3 + x^2 + x)\Big|_0^1 = -2 + \frac{4}{3}i.$$

Пример 2.

Вычислить интеграл

$$\int_C (z^2 + z\bar{z})\,dz,$$

где C — дуга окружности $|z| = 1$ $(0 \leqslant \arg z \leqslant \pi)$.

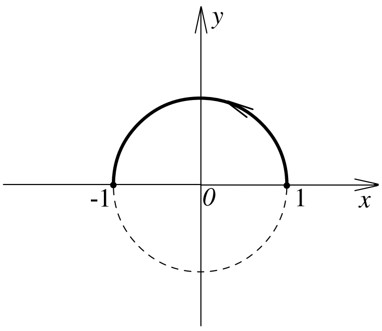

Рис. 8

Решение.

Положим $z = e^{i\varphi}$, тогда $dz = ie^{i\varphi}dz$, $\bar{z} = e^{-i\varphi}$, $z^2 = e^{2i\varphi}$. Получаем:

$$\int_C (z^2 + z\bar{z})\,dz = \int_0^\pi \left(e^{2i\varphi} + e^{i\varphi}e^{-i\varphi}\right) ie^{i\varphi}d\varphi =$$

$$= i\int_0^\pi \left(e^{3i\varphi} + e^{i\varphi}\right)\,d\varphi = i\left(\frac{1}{3i}e^{3i\varphi} + \frac{1}{i}e^{i\varphi}\right)\Bigg|_0^\pi =$$

$$= \frac{1}{3}e^{3\pi i} + e^{\pi i} - \frac{1}{3}e^0 - e^0 = -\frac{8}{3}.$$

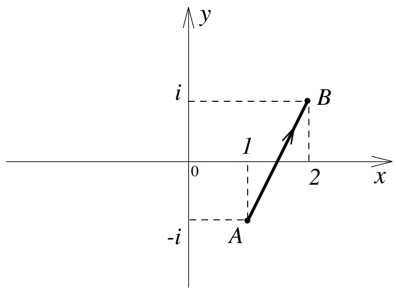

Рис. 9

Пример 3. Вычислить интеграл

$$\int_C (3z^2 + 2z)\, dz,$$

C — прямая AB, где $z_A = 1 - i$, $z_B = 2 + i$.

Решение.

Так как подынтегральная функция $f(z) = 3z^2 + 2z$ аналитична, то применим формулу Ньютона–Лейбница (9):

$$\int_C (3z^2 + 2z)\, dz = (z^3 + z^2)\Big|_{1-i}^{2+i} =$$

$$= (2+i)^3 + (2+i)^2 - (1-i)^3 - (1-i)^2 = 7 + 19i.$$

Задачи 8, 9, 10.

Функция $f(z)$, однозначная и аналитическая в кольце $r < |z - z_0| < R$ (не исключаются случаи, когда $r = 0$ и $R = \infty$), разлагается в этом кольце в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n. \quad (10)$$

В формуле (10) ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}$$

называется *главной частью* ряда Лорана, а ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

называется *правильной частью* ряда Лорана.

На практике, если это возможно, используют известные разложения в ряд Тейлора элементарных функций. Например, такие:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots \tag{11}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots \tag{12}$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{6} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \tag{13}$$

$$\operatorname{ch} z = 1 + \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} + \dots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots \tag{14}$$

$$\operatorname{sh} z = z + \frac{z^3}{6} + \dots + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \tag{15}$$

(эти разложения имеют место при $|z| < \infty$)

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots \tag{16}$$

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \dots + (-1)^n z^n + \dots \tag{17}$$

(верны при $|z| < 1$).

Пример 1. Функцию $f(z) = z \cos \dfrac{z}{z-1}$ разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 1$.

Решение. Представим данную функцию как функцию переменной $(z-1)$:

$$\begin{aligned} f(z) &= (z-1+1)\cos\left(1 + \frac{1}{z-1}\right) = \\ &= (z-1)\cos\left(1 + \frac{1}{z-1}\right) + \cos\left(1 + \frac{1}{z-1}\right) = \\ &= (z-1)\left(\cos 1 \cdot \cos\frac{1}{z-1} - \sin 1 \cdot \sin\frac{1}{z-1}\right) + \\ &\qquad + \cos 1 \cdot \cos\frac{1}{z-1} - \sin 1 \cdot \sin\frac{1}{z-1} \end{aligned} \tag{18}$$

Теперь воспользуемся формулами (12) и (13), считая за переменную $\dfrac{1}{z-1}$. Разложения (12) и (13) верны при $\left|\dfrac{1}{z-1}\right| < \infty$, то есть при $|z-1| > 0$. Значит, все наши рассуждения будут верны в кольце $0 < |z-1| < \infty$. Получаем:

$$\cos\frac{1}{z-1} = 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{24}\cdot\frac{1}{(z-1)^4} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!(z-1)^{2n}} + \dots \tag{19}$$

$$\sin\frac{1}{z-1} = \frac{1}{(z-1)} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{(z-1)^3} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(z-1)^{2n+1}} + \dots \tag{20}$$

Подставим выражения (19) и (20) в формулу (18) для данной функции:

$$f(z) = (z-1)\cos 1\left(1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{24}\cdot\frac{1}{(z-1)^4} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!(z-1)^{2n}} + \dots\right) - (z-1)\sin 1\left(\frac{1}{(z-1)} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{(z-1)^3} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(z-1)^{2n+1}} + \dots\right) + \cos 1\left(1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{24}\cdot\frac{1}{(z-1)^4} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!(z-1)^{2n}} + \dots\right) - \sin 1\left(\frac{1}{(z-1)} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{(z-1)^3} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(z-1)^{2n+1}} + \dots\right).$$

Раскрываем скобки и собираем вместе все слагаемые одинаковой степени:

$$f(z) = \cos 1(z-1) - \frac{\cos 1}{2(z-1)} + \frac{\cos 1}{24(z-1)^3} + \dots + \frac{(-1)^n\cos 1}{(2n)!(z-1)^{2n-1}} + \frac{(-1)^{n+1}\cos 1}{(2n+2)!(z-1)^{2n+1}} + \dots -$$

$$-\sin 1+\frac{\sin 1}{6(z-1)^2}+\dots+\frac{(-1)^{n+1}\sin 1}{(2n+1)!(z-1)^{2n}}+\dots+$$

$$+\cos 1-\frac{\cos 1}{2(z-1)^2}+\frac{\cos 1}{24(z-1)^4}+\dots+\frac{(-1)^n\cos 1}{(2n)!(z-1)^{2n}}+\dots-$$

$$-\frac{\sin 1}{z-1}+\frac{\sin 1}{6(z-1)^3}+\dots+\frac{(-1)^{n+1}\sin 1}{(2n+1)!(z-1)^{2n+1}}+\dots=$$

$$=\cos 1(z-1)+(\cos 1-\sin 1)-\frac{\cos 1+2\sin 1}{2(z-1)}-\frac{3\cos 1-\sin 1}{6(z-1)^2}+$$

$$+\frac{\cos 1+4\sin 1}{24(z-1)^3}+\dots+\frac{(-1)^n((2n+1)\cos 1-\sin 1)}{(2n+1)!(z-1)^{2n}}+$$

$$+\frac{(-1)^{n+1}(\cos 1+(2n+2)\sin 1)}{(2n+2)!(z-1)^{2n+1}}+\dots$$

Пример 2. Найти все лорановские разложения функции

$$f(z)=\frac{15z+450}{225z+15z^2-2z^3}$$

по степеням z.

Решение.

В данном случае нужно принять $z_0=0$. Функция $f(z)$ имеет три особые точки: $z_0=0$, $z_1=-\frac{15}{2}$, $z_2=15$. Следовательно, имеются три кольца с центром в точке $z_0=0$, в каждом из которых $f(z)$ является аналитической:

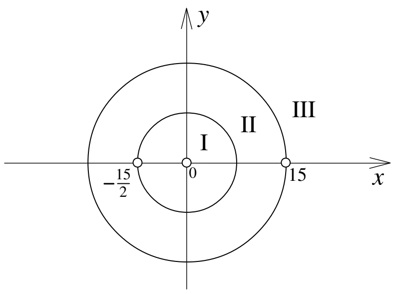

Рис. 10

I) $0<|z|<\frac{15}{2}$;

II) $\frac{15}{2}<|z|<15$;

III) $15<|z|<\infty$.

Найдем ряды Лорана для функции $f(z)$ в каждом из этих колец.

Для начала представим $f(z)$ в виде суммы элементарных дробей:

$$f(z) = \frac{450}{z} - \frac{2}{15+2z} + \frac{1}{15-z}. \tag{21}$$

а) Используем известные разложения (16) и (17). Для этого преобразуем простейшие дроби к нужному виду:

$$\frac{2}{15+2z} = \frac{2}{15\left(1+\dfrac{2z}{15}\right)} = \frac{2}{15}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{2z}{15}} =$$
$$= \frac{2}{15}\left(1 - \frac{2z}{15} + \frac{4z^2}{225} - \dots + \frac{(-1)^n 2^n z^n}{15^n} + \dots\right).$$

Тогда при $\left|\dfrac{2z}{15}\right| < 1$, т.е. при $|z| < \dfrac{15}{2}$ получим разложение

$$\frac{2}{15+2z} = \frac{2}{15} - \frac{4z}{225} + \frac{8z^3}{15^3} - \dots + \frac{(-1)^n 2^{n+1} z^n}{15^{n+1}} + \dots \tag{22}$$

Аналогично

$$\frac{1}{15-z} = \frac{1}{15\left(1-\dfrac{z}{15}\right)} = \frac{1}{15}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z}{15}} =$$
$$= \frac{1}{15}\left(1 + \frac{z}{15} + \frac{z^2}{225} + \dots + \frac{z^n}{15^n} + \dots\right) =$$
$$= \frac{1}{15} + \frac{z}{225} + \frac{z^2}{15^3} + \dots + \frac{z^n}{15^{n+1}} + \dots \tag{23}$$

Это разложение имеет место при $\left|\dfrac{z}{15}\right| < 1$, т.е. при $|z| < 15$.

Тогда в кольце $0 < |z| < \dfrac{15}{2}$ получим разложение исходной функции в ряд Лорана, подставив выражения (22) и (23) в (21) и приведя подобные слагаемые:

$$f(z) = \frac{450}{z} - \frac{2}{15} + \frac{4z}{225} - \frac{8z^3}{15^3} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}2^{n+1}z^n}{15^{n+1}} + \dots +$$
$$+ \frac{1}{15} + \frac{z}{225} + \frac{z^2}{15^3} + \dots + \frac{z^n}{15^{n+1}} + \dots =$$
$$= \frac{450}{z} - \frac{1}{15} + \frac{1}{45}z - \frac{7z^2}{15^3} + \dots + \frac{(1 + (-1)^{n+1}2^{n+1})}{15^{n+1}} \cdot z^n + \dots$$

б) При $|z| > \dfrac{15}{2}$ ряд (22) расходится. Поэтому представим выражение $\dfrac{2}{15+2z}$ по-другому:

$$\frac{2}{15+2z} = \frac{2}{2z\left(1 + \dfrac{15}{2z}\right)} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 + \dfrac{15}{2z}}.$$

При $\left|\dfrac{15}{2z}\right| < 1$, т.е. при $|z| > \dfrac{15}{2}$ получим, используя формулу (17), разложение

$$\frac{2}{15+2z} = \frac{1}{z}\left(1 - \frac{15}{2z} + \frac{225}{4z^2} - \dots + \frac{(-1)^n 15^n}{2^n z^n} + \dots\right) =$$
$$= \frac{1}{z} - \frac{15}{2z^2} + \frac{225}{4z^3} - \dots + \frac{(-1)^n 15^n}{2^n z^{n+1}} + \dots \quad (24)$$

Ряд (23) сходится при $|z| < 15$. Тогда в кольце $\dfrac{15}{2} < |z| < 15$ получаем второе разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана:

$$f(z) = \frac{450}{z} - \frac{1}{z} + \frac{15}{2z^2} - \frac{225}{4z^3} + \dots + \frac{(-1)^n 15^{n-1}}{2^{n-1}z^n} + \frac{(-1)^{n+1}15^n}{2^n z^{n+1}} + \dots +$$
$$+ \frac{1}{15} + \frac{z}{225} + \frac{z^2}{15^3} + \dots + \frac{z^n}{15^{n+1}} + \dots =$$

$$= \dots + \frac{(-1)^n 15^{n-1}}{2^{n-1}z^n} + \dots - \frac{225}{4z^3} + \frac{15}{2z^2} + \frac{449}{z} + \frac{1}{15} +$$

$$+ \frac{z}{225} + \frac{z^2}{15^3} + \dots + \frac{z^n}{15^{n+1}} + \dots$$

в) При $|z| > 15$ ряд (24) сходится, а ряд (23) расходится, поэтому представим функцию $\dfrac{1}{15-z}$ следующим образом:

$$\frac{1}{15-z} = -\frac{1}{z\left(1-\dfrac{15}{z}\right)} = -\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{15}{z}} =$$

$$= -\frac{1}{z}\left(1 + \frac{15}{z} + \frac{225}{z^2} + \dots + \frac{15^n}{z^n} + \dots\right) =$$

$$= -\frac{1}{z} - \frac{15}{z^2} - \frac{225}{z^3} - \dots - \frac{15^n}{z^{n+1}} - \dots \quad (25)$$

Этот ряд сходится при $\left|\dfrac{15}{z}\right| < 1$, т.е. при $|z| > 15$.

Теперь в кольце $15 < |z| < \infty$ получим третье разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана:

$$f(z) = \frac{450}{z} - \frac{1}{z} + \frac{15}{2z^2} - \frac{225}{4z^3} + \dots + \frac{(-1)^n 15^{n-1}}{2^{n-1}z^n} + \frac{(-1)^{n+1}15^n}{2^n z^{n+1}} + \dots -$$

$$- \frac{1}{z} - \frac{15}{z^2} - \frac{225}{z^3} - \dots - \frac{15^n}{z^{n+1}} - \dots =$$

$$= \frac{448}{z} - \frac{15}{2}\cdot\frac{1}{z^2} - \frac{1125}{4}\cdot\frac{1}{z^3} + \dots + \frac{15^{n-1}((-1)^n - 2^{n-1})}{2^{n-1}z^n} + \dots$$

Пример 3. Найти все лорановские разложения функции $f(z) = \dfrac{2z}{z^2-4}$ по степеням $z - z_0$, где $z_0 = 3 - 2i$.

Решение.

Представим функцию в виде

$$f(z) = \frac{2z}{z^2-4} = \frac{1}{z-2} + \frac{1}{z+2}.$$

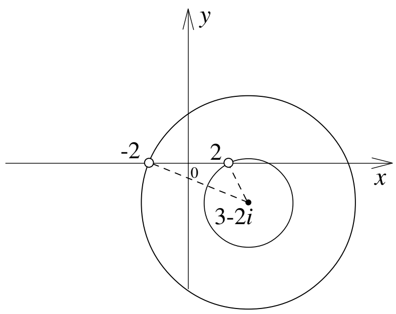

Рис. 11

У функции две особые точки: $z_1 = 2$ и $z_2 = -2$. Соответственно, имеется 3 кольца с центром в точке $z_0 = 3-2i$, в каждом из которых функция $f(z)$ является аналитической:

I) $0 \leqslant |z-3+2i| < \sqrt{5}$;

II) $\sqrt{5} < |z-3+2i| < \sqrt{29}$;

III) $\sqrt{29} < |z-3+2i| < \infty$;

а) Теперь поступаем аналогично примеру 2, используя формулы (16) и (17).

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{(z-3+2i)+3-2i-2} =$$

$$= \frac{1}{(1-2i)+(z-3+2i)} = \frac{1}{1-2i} \cdot \frac{1}{1+\dfrac{z-3+2i}{1-2i}}$$

Значит, при $\left|\dfrac{z-3+2i}{1-2i}\right| < 1$, т.е. при $|z-3+2i| < \sqrt{5}$ можно получить разложение в ряд

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{1-2i}\left(1 - \frac{(z-3+2i)}{1-2i} + \frac{(z-3+2i)^2}{(1-2i)^2} - \dots + \right.$$

$$\left. + \frac{(-1)^n(z-3+2i)^n}{(1-2i)^n} + \dots \right) = \frac{1}{1-2i} + \frac{(z-3+2i)}{3+4i} +$$

$$+ \frac{(z-3+2i)^2}{11-2i} + \dots + \frac{(-1)^n(z-3+2i)^n}{(1-2i)^{n+1}} + \dots \quad (26)$$

Аналогично,

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{(z-3+2i)+3-2i+2} =$$

$$= \frac{1}{(z-3+2i)+5-2i} = \frac{1}{5-2i} \cdot \frac{1}{1+\dfrac{z-3+2i}{5-2i}}$$

Значит, при $\left|\dfrac{z-3+2i}{5-2i}\right| < 1$, т.е. при $|z-3+2i| < \sqrt{29}$ можно получить разложение в ряд

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{5-2i}\left(1 - \frac{(z-3+2i)}{5-2i} + \frac{(z-3+2i)^2}{(5-2i)^2} - \dots + \right.$$
$$\left. + \frac{(-1)^n(z-3+2i)^n}{(5-2i)^n} + \dots\right) = \frac{1}{5-2i} - \frac{(z-3+2i)}{21-20i} +$$
$$+ \frac{(z-3+2i)^2}{65-142i} + \dots + \frac{(-1)^n(z-3+2i)^n}{(5-2i)^{n+1}} + \dots \quad (27)$$

Итак, в кольце $0 \leqslant |z-3+2i| < \sqrt{5}$ получим первое разложение в ряд Лорана функции $f(z)$:

$$f(z) = \frac{1}{1-2i} + \frac{(z-3+2i)}{3+4i} + \frac{(z-3+2i)^2}{11-2i} + \dots +$$
$$+ \frac{(-1)^n(z-3+2i)^n}{(1-2i)^{n+1}} + \dots + \frac{1}{5-2i} - \frac{(z-3+2i)}{21-20i} +$$
$$+ \frac{(z-3+2i)^2}{65-142i} + \dots + \frac{(-1)^n(z-3+2i)^n}{(5-2i)^{n+1}} + \dots =$$
$$= \frac{54+68i}{145} + \frac{-126+120i}{841}(z-3+2i) + \dots +$$
$$+ (-1)^n\left(\frac{1}{(1-2i)^{n+1}} + \frac{1}{(5-2i)^{n+1}}\right)(z-3+2i)^n + \dots$$

б) При $|z-3+2i| > \sqrt{5}$ ряд (26) расходится. Представим функцию $\dfrac{1}{z-2}$ по-другому:

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{(1-2i)+(z-3+2i)} = \frac{1}{z-3+2i} \cdot \frac{1}{1 + \dfrac{1-2i}{z-3+2i}}$$

Тогда

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z-3+2i}\left(1-\frac{1-2i}{z-3+2i}+\frac{(1-2i)^2}{(z-3+2i)^2}+\dots+\right.$$
$$\left.+\frac{(-1)^n(1-2i)^n}{(z-3+2i)^n}+\dots\right)=\frac{1}{z-3+2i}-\frac{1-2i}{(z-3+2i)^2}+$$
$$+\frac{-3-4i}{(z-3+2i)^3}+\dots+\frac{(-1)^n(1-2i)^n}{(z-3+2i)^{n+1}}+\dots \quad (28)$$

Причем полученный ряд сходится при $\left|\dfrac{1-2i}{z-3+2i}\right|<1$, т.е. при $|z-3+2i|>\sqrt{5}$.

Теперь в кольце $\sqrt{5}<|z-3+2i|<\sqrt{29}$, складывая ряды (28) и (27), получаем второе разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана:

$$f(z)=\dots+\frac{(-1)^{n-1}(1-2i)^{n-1}}{(z-3+2i)^n}+\dots-\frac{3+4i}{(z-3+2i)^3}+$$
$$+\frac{-1+2i}{(z-3+2i)^2}+\frac{1}{z-3+2i}+\frac{1}{5-2i}-\frac{(z-3+2i)}{21-20i}+$$
$$+\frac{(z-3+2i)^2}{65-142i}+\dots+\frac{(-1)^n(z-3+2i)^n}{(5-2i)^{n+1}}+\dots$$

в) При $|z-3+2i|>\sqrt{29}$ ряд (27) также становится расходящимся. Тогда

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{(z-3+2i)+5-2i}=\frac{1}{z-3+2i}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{5-2i}{z-3+2i}}$$

И теперь

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{z-3+2i}\left(1-\frac{5-2i}{z-3+2i}+\frac{(5-2i)^2}{(z-3+2i)^2}+\dots+\right.$$

$$+\frac{(-1)^n(5-2i)^n}{(z-3+2i)^n}+\dots\Bigg) = \frac{1}{z-3+2i} - \frac{5-2i}{(z-3+2i)^2} +$$
$$+\frac{21-20i}{(z-3+2i)^3}+\dots+\frac{(-1)^n(5-2i)^n}{(z-3+2i)^{n+1}}+\dots \quad (29)$$

Этот ряд сходится при $\left|\dfrac{5-2i}{z-3+2i}\right| < 1$, т.е. при $|z-3+2i| > \sqrt{29}$.

Складывая ряды (28) и (29), получим третье разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в кольце $\sqrt{29} < |z-3+2i| < \infty$:

$$f(z) = \frac{2}{z-3+2i} - \frac{6-4i}{(z-3+2i)^2} + \frac{18-24i}{(z-3+2i)^3} +$$
$$+\dots+\frac{(-1)^{n-1}((1-2i)^{n-1}+(5-2i)^{n-1})}{(z-3+2i)^n}+\dots$$

Задачи 11, 12.

Точка z_0 называется *изолированной особой точкой* функции $f(z)$, если существует окрестность этой точки, в которой функция $f(z)$ аналитична всюду, кроме самой точки z_0.

Функцию $f(z)$ в окрестности точки z_0 можно разложить в ряд Лорана. При этом возможны три различных случая, когда ряд Лорана:

1) не содержит членов с отрицательными степенями разности $z-z_0$, т.е.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$$

(ряд Лорана не содержит главной части). В этом случае z_0 называется *устранимой особой точкой* функции $f(z)$.

2) содержит конечное число членов с отрицательными степенями разности $z-z_0$, т.е.

$$f(z) = \sum_{n=-p}^{\infty} c_n (z-z_0)^n,$$

причем $c_{-p} \neq 0$. В этом случае точка z_0 называется *полюсом порядка* p функции $f(z)$.

3) содержит бесконечное число членов с отрицательными степенями разности $z - z_0$, т.е.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

В этом случае точка z_0 называется *существенно особой точкой* функции $f(z)$.

При определении характера изолированной особой точки не обязательно искать разложение функции в ряд Лорана. Можно использовать различные свойства изолированных особых точек.

1) z_0 является устранимой особенностью функции $f(z)$, если существует конечный предел функции $f(z)$ в точке z_0:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = c_0, \quad |c_0| < \infty.$$

2) z_0 является полюсом функции $f(z)$, если

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty.$$

3) z_0 является существенно особой точкой функции $f(z)$, если при $z \to z_0$ функция $f(z)$ не имеет предела, ни конечного, ни бесконечного.

Точка z_0 называется *нулем функции* $f(z)$ *порядка* n *(или кратности* n*)*, если выполняются условия

$$f(z_0) = 0, \quad f'(z_0) = 0, \quad \ldots f^{(n-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(n)}(z_0) \neq 0.$$

Заметим, что z_0 тогда и только тогда является нулем n-го порядка функции $f(z)$, когда в некоторой окрестности этой точки имеет место равенство

$$f(z) = (z - z_0)^n \varphi(z),$$

где функция $\varphi(z)$ аналитична в точке z_0, и $\varphi(z) \neq 0$.

4) Точка z_0 является полюсом порядка n ($n \geqslant 1$) функции $f(z)$, если эта точка является нулем порядка n для функции $\varphi(z) = \dfrac{1}{f(z)}$.

5) Пусть z_0 — изолированная особая точка функции $f(z) = \dfrac{\lambda(z)}{\mu(z)}$, где $\lambda(z)$ и $\mu(z)$ — функции, аналитические в точке z_0. И пусть точка z_0 является нулем порядка k функции $\lambda(z)$ и нулем порядка l функции $\mu(z)$.

При $l > k$ точка z_0 является полюсом порядка $n = l - k$ функции $f(z)$.

При $l \leqslant k$ точка z_0 является устранимой особой точкой функции $f(z)$.

При определении порядка нуля полезным оказывается также следующий прием. Если функции $f(z)$ аналитична в точке z_0, то в окрестности этой точки она представима своим рядом Тейлора, который имеет вид

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \\ + \dots + \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k + \dots$$

Как видим, коэффициенты ряда Тейлора с точностью до некоторого множителя, не равного нулю, совпадают с производными функции в точке z_0. Разложив функцию $f(z)$ в ряд Тейлора, легко будет определить порядок нуля — он совпадет с первой степенью, коэффициент при которой не равен нулю.

Пример 1. Определить тип особой точки $z_0 = 0$ для функции $f(z) = \dfrac{e^{z^5} - 1}{e^z - 1 - z}$.

Решение. Представим функцию в виде дроби $f(z) = \dfrac{\lambda(z)}{\mu(z)}$, где

$$\lambda(z) = e^{z^5} - 1, \quad \mu(z) = e^z - 1 - z.$$

Точка $z_0 = 0$ является нулем обеих функций $\lambda(z)$ и $\mu(z)$. Разложим их в ряд Тейлора, используя известное разложение для функции e^z (11).

$$\lambda(z) = e^{z^5} - 1 = 1 + z^5 + \frac{z^{10}}{2} + \dots - 1 = z^5 + \frac{z^{10}}{2} + \dots$$

Видно, что $\lambda(0) = \lambda'(0) = \lambda''(0) = \lambda'''(0) = \lambda^{(4)}(0) = 0$, а $\lambda^{(5)}(0) \neq 0$. Таким образом, точка $z_0 = 0$ является нулем порядка $k = 5$ функции $\lambda(z)$.

Далее,

$$\mu(z) = e^z - 1 - z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \dots - 1 - z = \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \dots,$$

то есть точка $z_0 = 0$ является нулем порядка $l = 2$ функции $\mu(z)$.

Получаем, что $k > l$, следовательно точка $z_0 = 0$ является устранимой особой точкой функции $f(z)$.

Пример 2. Определить тип особой точки $z_0 = 0$ для функции $f(z) = z \cos \dfrac{2}{z^3}$.

Решение. Разложим функцию $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 0$, используя известное разложение для косинуса (12):

$$f(z) = z \cos \frac{2}{z^3} = z \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{z^6} + \frac{1}{4!} \cdot \frac{16}{z^{12}} - \dots \right) = \\ = z - \frac{2}{z^5} + \frac{2}{3z^{11}} - \dots$$

Видим, что разложение содержит бесконечное число членов с отрицательными степенями. Поэтому, согласно определению, точка $z_0 = 0$ является существенно особой точкой функции $f(z)$.

Пример 3. Для функции $f(z) = \dfrac{\sin \pi z}{z^4 - 1} e^{1/z}$ найти изолированные особые точки и определить их тип.

Решение. Особыми точками функции являются пять точек: 0, ± 1, $\pm i$. Рассмотрим их последовательно.

$z_0 = 0$. Попробуем найти предел функции $f(z)$ при $z \to 0$.

Пусть сначала z стремится к 0 по действительной оси справа, т.е. $z = x$, $x > 0$. Тогда

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z=x>0}} f(z) = \lim_{x\to +0} \frac{\sin \pi x}{x^4-1} e^{1/x} = -1 \cdot \lim_{x\to +0} (\pi x)\cdot e^{1/x} =$$

$$= -\pi \lim_{x\to +0} \frac{e^{1/x}}{1/x} = -\pi \lim_{t\to +\infty} \frac{e^t}{t} = -\pi \lim_{t\to +\infty} \frac{e^t}{1} = +\infty.$$

(здесь мы воспользовались эквивалентностью $\sin \pi x \sim \pi x$ при $x \to 0$ и правилом Лопиталя).

Пусть теперь z стремится к 0 по действительной оси слева, т.е. $z = x$, $x < 0$. Тогда

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z=x<0}} f(z) = \lim_{x\to -0} \frac{\sin \pi x}{x^4-1} e^{1/x} = -1 \cdot \lim_{x\to -0} (\pi x)\cdot e^{1/x} =$$

$$= -\pi \lim_{x\to -0} \frac{e^{1/x}}{1/x} = -\pi \lim_{t\to -\infty} \frac{e^t}{t} = -\pi \lim_{t\to -\infty} \frac{e^t}{1} = 0.$$

Мы получили разные пределы, приближаясь к нулю по разным направлениям. Следовательно, функция $f(z)$ вообще не имеет предела при $z \to 0$. А это означает, что точка $z_0 = 0$ является существенно особой точкой функции $f(z)$.

$z_1 = 1$. Вычислим предел

$$\lim_{z\to 1} f(z) = \lim_{z\to 1} \frac{e^{1/z}}{(z+1)(z^2+1)} \cdot \frac{\sin \pi z}{(z-1)} =$$

$$= \frac{e}{2\cdot 2} \lim_{z\to 1} \frac{\sin(\pi(z-1)+\pi)}{(z-1)} = \frac{e}{4} \lim_{z\to 1} \frac{-\sin(\pi(z-1))}{(z-1)} =$$

$$= -\frac{e}{4} \lim_{z\to 1} \frac{\pi(z-1)}{(z-1)} = -\frac{\pi e}{4}.$$

Предел существует и конечен. Значит, точка $z_1 = 1$ является устранимой особенностью функции $f(z)$.

Аналогично, для точки $z_2 = -1$ получаем

$$\lim_{z\to -1} f(z) = \lim_{z\to -1} \frac{e^{1/z}}{(z-1)(z^2+1)} \cdot \frac{\sin \pi z}{(z+1)} =$$

$$= \frac{e^{-1}}{-2\cdot 2} \lim_{z\to -1} \frac{\sin(\pi(z+1)-\pi)}{(z+1)} = \frac{e^{-1}}{4} \lim_{z\to -1} \frac{\sin(\pi(z+1))}{(z+1)} =$$

$$= \frac{e^{-1}}{4} \lim_{z\to -1} \frac{\pi(z+1)}{(z+1)} = \frac{\pi}{4e},$$

и это означает, что точка $z_2 = -1$ также является устранимой особенностью функции $f(z)$.

$z_3 = i$. Представив $f(z)$ в виде $\dfrac{\lambda(z)}{\mu(z)}$, где

$$\lambda(z) = \frac{e^{1/z} \sin \pi z}{(z^2-1)(z+i)}, \quad \mu(z) = z - i.$$

Вычисляем:

$$\lambda(i) = \frac{e^{-i} \sin \pi i}{-2\cdot 2i} \neq 0,$$
$$\mu(i) = 0, \quad \mu'(z) = 1 \neq 0.$$

Значит, точка $z_3 = i$ является полюсом первого порядка.

Аналогично, для точки $z_4 = -i$ получим представление $f(z)$ в виде дроби, где

$$\lambda(z) = \frac{e^{1/z} \sin \pi z}{(z^2-1)(z-i)}, \quad \mu(z) = z + i.$$

и

$$\lambda(-i) = \frac{e^{i} \sin(-\pi i)}{-2\cdot(-2i)} \neq 0,$$
$$\mu(-i) = 0, \quad \mu'(z) = 1 \neq 0.$$

Значит, точка $z_4 = -i$ также является полюсом первого порядка функции $f(z)$.

Пример 4. Найти изолированные особые точки и определить их тип для функции $f(z) = \dfrac{\sin 3z}{z(1-\cos z)}$.

Решение. Функции $\lambda(z) = \sin 3z$ и $\mu(z) = z(1-\cos z)$ — аналитические в $\mathbb{C}$. Значит, особыми точками функции $f(z)$ являются нули знаменателя, т.е. точки, где $\mu(z) = 0$. Таких точек бесконечно много. Во-первых, это точка $z_0 = 0$, а также точки, удовлетворяющие уравнению $1 - \cos z = 0$. Отсюда $\cos z = 1$, и

$$z = \operatorname{Arccos} 1 = -i\operatorname{Ln}(1+0) = -i(0 + i\cdot 0 + 2\pi k i) = 2\pi n,$$

где n — любое целое число. Заметим, что точка $z_0 = 2\pi n$ при $n = 0$. Итак, обозначим $z_n = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

$z_0 = 0$. В этой точке получим:

$$\begin{array}{ll} \lambda(z) = \sin 3z & \lambda(0) = 0 \\ \lambda'(z) = 3\cos 3z & \lambda'(0) = 3 \neq 0. \end{array}$$

Порядок нуля равен $k = 1$.

$$\begin{array}{ll} \mu(z) = z(1-\cos z) & \mu(0) = 0 \\ \mu'(z) = 1 - \cos z + z\sin z & \mu'(0) = 0 \\ \mu''(z) = 2\sin z + z\cos z & \mu''(0) = 0 \\ \mu'''(z) = 3\cos z - z\sin z & \mu'''(0) = 3 \neq 0. \end{array}$$

Порядок нуля знаменателя равен $l = 3$.

Значит, точка $z_0 = 0$ является полюсом второго порядка $(l - k = 2)$.

$z_n = 2\pi n$, $n \neq 0$. Тогда

$$\lambda(z_n) = 0, \quad \lambda'(z_n) = 3 \neq 0.$$

Порядок нуля числителя равен $k = 1$.

$$\mu(z_n) = 0, \quad \mu'(z_n) = 0, \quad \mu''(z_n) = 2\pi n \neq 0.$$

Порядок нуля знаменателя равен $l = 2$. Следовательно, точки $z_n = 2\pi n$ при $n \neq 0$ являются полюсами первого порядка.

Пример 5. Найти изолированные особые точки функции $f(z) = \dfrac{1}{\sin(1/z)}$ и определить их тип.

Решение. Решаем уравнение

$$\sin\frac{1}{z} = 0$$
$$\frac{1}{z} = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$
$$z_n = \frac{1}{\pi n}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Особыми точками функции $f(z)$ являются точки $z_0 = 0$ и точки $z_n = \dfrac{1}{\pi n}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$. Однако при $n \to \infty$ видим, что $z_n \to 0$. Следовательно, в любой окрестности точки z_0 содержится бесконечно много особых точек функции $f(z)$. Точка $z_0 = 0$ является неизолированной особой точкой функции $f(z)$ и под классификацию не подходит.

Точки $z_n = \dfrac{1}{\pi n}$ — изолированные. Если обозначить $\varphi(z) = \dfrac{1}{f(z)} = \sin\dfrac{1}{z}$, то

$$\varphi(z) = \sin\frac{1}{z} \qquad \varphi(z_n) = 0$$
$$\varphi'(z) = -\frac{1}{z^2}\cos\frac{1}{z} \qquad \varphi'(z_n) = -\pi^2 n^2 (-1)^n \neq 0.$$

Значит, точки z_n являются для функции $\varphi(z)$ нулями первого порядка. Следовательно, для функции $f(z)$ они являются полюсами первого порядка.

Задачи 13, 14, 15, 16.

При вычислении интегралов здесь применяется

Теорема Коши о вычетах. Если функция $f(z)$ является аналитической на границе C области D и всюду внутри области, за исключением конечного числа особых точек z_1, z_2, ..., z_n, то

$$\int\limits_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} f(z_k).$$

Мы не приводим здесь определение вычета, оставив его за лекционным курсом. Рассмотрим лишь некоторые практические приемы вычисления вычетов.

Стоит заметить также, что при вычислении интегралов стоит аккуратно найти все особые точки функции $f(z)$, затем нарисовать контур и особые точки, и после этого выбрать только те точки, которые попали внутрь контура интегрирования. Сделать правильный выбор без рисунка часто бывает затруднительно.

Способ вычисления вычета зависит от типа особой точки. Поэтому, прежде чем вычислять вычет, нужно определить тип особенности, иначе вычисления могут оказаться неверными.

1) Вычет функции равен коэффициенту при минус первой степени в лорановском разложении $f(z)$ в окрестности точки $z = z_0$:

$$\operatorname{res} f(z_0) = c_{-1}$$

Это утверждение верно для всех типов изолированных особых точек, и поэтому в данном случае определять тип особой точки не обязательно.

2) Вычет в устранимой особой точке равен нулю.

3) Если z_0 — полюс первого порядка, а функцию $f(z)$ можно представить в виде $f(z) = \dfrac{\lambda(z)}{\mu(z)}$, где $\lambda(z_0) \neq 0$, $\mu(z_0) = 0$ (заметим, что в этом случае $\mu'(z_0) \neq 0$). Тогда вычет равен

$$\operatorname{res} f(z_0) = \frac{\lambda(z_0)}{\mu'(z_0)}.$$

В частности, если $f(z) = \dfrac{1}{\varphi(z)}$, то $\operatorname{res} f(z_0) = \dfrac{1}{\varphi'(z_0)}$.

4) Если z_0 — полюс первого порядка, то

$$\operatorname{res} f(z_0) = \lim_{z \to z_0} \left[f(z)(z - z_0) \right]. \tag{30}$$

5) Если z_0 — полюс порядка n функции $f(z)$, то

$$\operatorname{res} f(z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left(f(z)(z - z_0)^n \right). \tag{31}$$

Стоит обратить внимание, что при применении этой формулы функцию $f(z)$ нужно сначала умножить на $(z - z_0)^n$, и лишь потом дифференцировать полученное выражение.

При вычислении пределов можно использовать многие приемы действительного анализа. Для тех функций, которые встречаются в задачах, можно использовать известные эквивалентности бесконечно малых величин, а также правило Лопиталя.

Пример 1. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{|z - \frac{3}{2}| = 2} \frac{z^3 + \sin 2z}{\sin \frac{z}{2} \cdot (z - \pi)} \, dz.$$

Решение.

Особые точки функции $f(z) = \dfrac{z^3 + \sin 2z}{\sin \frac{z}{2} \cdot (z - \pi)}$ — это точки $z = \pi$ и $z_n = 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$. Видим, что внутрь контура попали точки $z = \pi$ и $z_0 = 0$.

Точка $z = \pi$. Пусть $\lambda(z) = \dfrac{z^3 + \sin 2z}{\sin(z/2)}$, $\mu(z) = z\pi$.

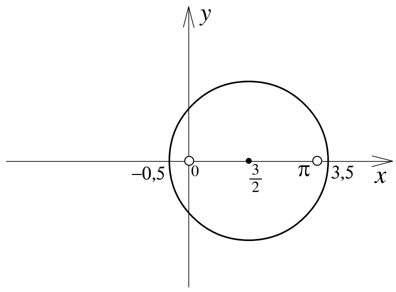

Рис. 12

Тогда $f(z) = \dfrac{\lambda(z)}{\mu(z)}$. Вычисляем:

$$\lambda(\pi) = \frac{\pi^3 + 0}{1} = \pi^3 \neq 0$$

$$\mu(\pi) = 0, \quad \mu'(\pi) = 1 \neq 0.$$

Значит, точка $z = \pi$ является полюсом первого порядка. вычет равен

$$\operatorname{res} f(\pi) = \frac{\lambda(\pi)}{\mu'(\pi)} = \pi^3$$

Точка $z_0 = 0$. Примем теперь $\lambda(z) = z^3 + \sin 2z$, $\mu(z) = \sin\frac{z}{2}(z-\pi)$. Получаем

$$\begin{aligned}
&\lambda(0) = 0 \\
&\lambda'(z) = 3z^2 + 2\cos 2z && \lambda'(0) = 2 \neq 0 \\
&\mu(0) = 0 \\
&\mu'(z) = \frac{1}{2}\cos\frac{z}{2}(z-\pi) + \sin\frac{z}{2} && \mu'(0) = -\frac{\pi}{2} \neq 0.
\end{aligned}$$

Значит, точка $z_0 = 0$ является устранимой особой точкой, и, следовательно, $\operatorname{res} f(0) = 0$.

Используя теорему Коши, находим

$$\int\limits_{|z-\frac{3}{2}|=2} \frac{z^3 + \sin 2z}{\sin\frac{z}{2}\cdot(z-\pi)}\,dz = 2\pi i \cdot \pi^3 = 2\pi^4 i.$$

Пример 2. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{|z|=1} \frac{z^2 e^{1/z} - 1}{z}\,dz$$

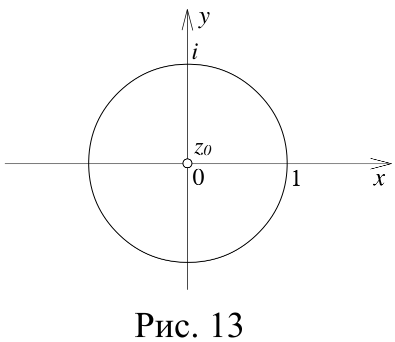

Рис. 13

Решение.

Единственная особая точка подынтегральной функции $f(z) = \dfrac{z^2 e^{1/z} - 1}{z}$ — это точка $z_0 = 0$. Она попадает внутрь контура. Подынтегральная функция легко разлагается в ряд Лорана по степеням z, если использовать известное разложение для экспоненты (11):

$$f(z) = \frac{1}{z}\left(z^2\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2z^2}+\frac{1}{6z^3}+\frac{1}{24z^4}+\ldots\right)-1\right) =$$
$$= \frac{1}{z}\left(z^2+z+\frac{1}{2}+\frac{1}{6z}+\frac{1}{24z^2}+\cdots-1\right) =$$
$$= z+1+\frac{1}{2z}+\frac{1}{6z^2}+\frac{1}{24z^3}+\cdots-\frac{1}{z} =$$
$$= z+1-\frac{1}{2z}+\frac{1}{6z^2}+\frac{1}{24z^3}+\ldots$$

Видим, что $\operatorname{res} f(0) = c_{-1} = -\dfrac{1}{2}$. Тогда

$$\int\limits_{|z|=1} \frac{z^2 e^{1/z}-1}{z}\, dz = -\frac{1}{2}\cdot 2\pi i = -\pi i.$$

Пример 3. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{|z|=3} \frac{3z^3+3z^2-2}{2z^5}\, dz.$$

Решение.

Здесь имеется единственная особая точка $z_0 = 0$, которая попадает внутрь контура интегрирования. Ряд Лорана для подынтегральной функции конечен:

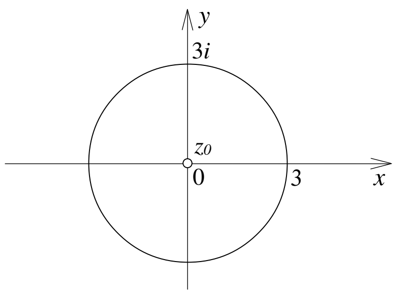

Рис. 14

$$f(z) = \frac{2}{2z^2}+\frac{3}{2z^3}-\frac{1}{z^5}.$$

Легко видеть, что $c_{-1} = 0$, т.е. $\operatorname{res} f(0) = 0$, а значит, и интеграл равен нулю.

Стоит отметить, что точка $z_0 = 0$ является полюсом пятого порядка. Вычисление вычета по формуле (31) требует некоторого напряжения.

Пример 4. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{|z|=0,3} \frac{e^{3z}-1-\sin 3z}{z^2 \operatorname{sh} 3\pi z}\,dz.$$

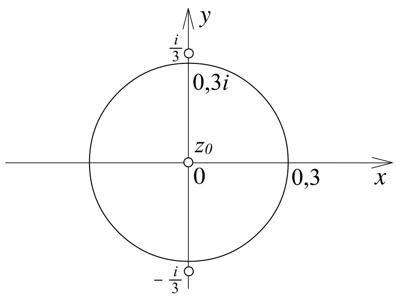

Рис. 15

Решение.

Найдем особые точки подынтегральной функции. Для этого решим уравнение

$$\operatorname{sh} 3\pi z = 0$$

$$3\pi z = \operatorname{Arsh} 0 = \operatorname{Ln}(0+\sqrt{1}) =$$

$$= \operatorname{Ln}(\pm 1) = \ln 1 + \left\{\begin{matrix}\pi \\ 0\end{matrix}\right\} i +$$

$$+ 2\pi k i = \pi n i.$$

Итак, особые точки $z_n = \dfrac{ni}{3}$, где $n \in \mathbb{Z}$, а также точка $z_0 = 0$, которая также получается при $n = 0$.

Так как $\dfrac{1}{3} > 0,3$, то внутрь контура попадает лишь точка $z_0 = 0$.

Представим функцию $f(z)$ в виде $\dfrac{\lambda(z)}{\mu(z)}$, где $\lambda(z) = e^{3z} - 1 - \sin 3z$, $\mu(z) = z^2 \operatorname{sh} 3\pi z$. Разлагая в ряд, находим

$$\lambda(z) = 1+3z+\frac{9}{2}z^2+\frac{9}{2}z^3+\dots-1-3z+\frac{9}{2}z^3+\dots = \frac{9}{2}z^2+9z^3+\dots$$

Значит, $z_0 = 0$ — нуль порядка 2 функции $\lambda(z)$.

$$\mu(z) = z^2\left(3\pi z + \frac{9\pi^3}{2}z^3 + \dots\right) = 3\pi z^3 + \frac{9\pi^3}{2}z^5 + \dots$$

Значит, $z_0 = 0$ — нуль порядка 3 функции $\mu(z)$. Следовательно, точка $z_0 = 0$ является полюсом первого порядка функции $f(z)$. Теперь используем (30) для вычисления вычета:

$$\operatorname{res} f(0) = \lim_{z\to 0} \frac{e^{3z}-1-\sin 3z}{z \operatorname{sh} 3\pi z} = \lim_{z\to 0} \frac{e^{3z}-1-\sin 3z}{3\pi z^2},$$

т.к. $\operatorname{sh} 3\pi z \sim 3\pi z$ при $z \to 0$. Далее, используя правило Лопиталя, находим

$$\operatorname{res} f(0) = \lim_{z\to 0} \frac{3e^{3z} - 3\cos 3z}{6\pi z} = \lim_{z\to 0} \frac{9e^{3z} + 9\sin 3z}{6\pi} = \frac{9}{6\pi} = \frac{3}{2\pi}.$$

В результате получаем значение интеграла:

$$\int\limits_{|z|=0{,}3} \frac{e^{3z} - 1 - \sin 3z}{z^2 \operatorname{sh} 3\pi z}\, dz = 2\pi i \cdot \frac{3}{2\pi} = 3i.$$

Пример 5. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{|z+2i|=3} \left(\frac{\pi}{e^{\pi z/2} + 1} + \frac{6 \operatorname{ch} \dfrac{\pi i z}{2-2i}}{(z-2+2i)^2 (z-4-2i)} \right) dz$$

Решение.

Находим особые точки:

$$e^{\pi z/2} + 1 = 0 \Rightarrow \frac{\pi z}{2} = \operatorname{Ln}(-1)$$

Следовательно,

$$\frac{\pi z}{2} = \pi i + 2\pi n i.$$

Итак, $z_n = (2+4n)i$, где $n \in \mathbb{Z}$. Внутрь контура попала точка $z_0 = -2i$ (при $n = -1$).

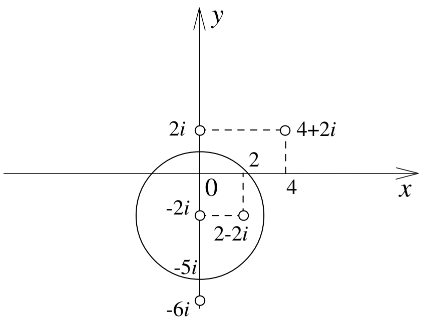

Рис. 16

Далее, особыми также являются точки $z_1 = 2 - 2i$ и $z_2 = 4 + 2i$. Внутрь контура попала точка z_1.

Так как особые точки функций

$$f_1(z) = \frac{\pi}{e^{\pi z/2} + 1} \text{ и } f_2(z) = \frac{6 \operatorname{ch} \dfrac{\pi i z}{2-2i}}{(z-2+2i)^2 (z-4-2i)}$$

не совпадают, то можно рассматривать интеграл как сумму интегралов от каждой из этих функций отдельно.

Пусть $\varphi(z) = \dfrac{1}{f_1(z)} = \dfrac{e^{\pi z/2}+1}{\pi}$. Тогда

$$\varphi(-2i) = 0$$
$$\varphi'(z) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}e^{\pi z/2} \quad \varphi'(-2i) = \frac{1}{2}e^{-\pi i} = -\frac{1}{2}$$

Значит, точка $z_0 = -2i$ — полюс первого порядка функции $f_1(z)$, и вычет в этой точке равен

$$\operatorname{res} f(-2i) = \frac{1}{\varphi'(-2i)} = -2.$$

Перейдем к функции $f_2(z)$. Представим ее в виде $f_2(z) = \dfrac{\lambda(z)}{\mu(z)}$, где $\lambda(z) = \dfrac{6\operatorname{ch}\dfrac{\pi i z}{2-2i}}{(z-4-2i)}$, $\mu(z) = (z-2+2i)^2$. Видим, что

$$\lambda(2-2i) = \frac{6\operatorname{ch}\pi i}{2-2i-4-2i} = \frac{6\cos(-\pi)}{-2-4i} = \frac{3}{1+2i} \neq 0,$$

а для функции $\mu(z)$ точка $z_1 = 2-2i$ является нулем второго порядка. Значит, точка z_1 является полюсом второго порядка функции $f_2(z)$. Для вычисления вычета используем формулу (31). Сначала вычислим производную:

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{6\operatorname{ch}\dfrac{\pi i z}{2-2i}}{(z-4-2i)}\right) = 6\left(\frac{\pi i}{2-2i}\cdot\frac{\operatorname{sh}\dfrac{\pi i z}{2-2i}}{z-4-2i} - \frac{\operatorname{ch}\dfrac{\pi i z}{2-2i}}{(z-4-2i)^2}\right)$$

И находим вычет, просто подставив $z_1 = 2-2i$ в полученное выражение:

$$\operatorname{res} f_2(2-2i) = 6\cdot\left(\frac{\pi i}{2-2i}\cdot\frac{\operatorname{sh}\pi i}{2-2i-4-2i}-\right.$$

$$\left.-\frac{\operatorname{ch}\pi i}{(2-2i-4-2i)^2}\right) = 6\cdot\frac{1}{(-2-4i)^2} = \frac{6}{4-16+16i} =$$

$$= \frac{6}{-12+16i} = \frac{3(-6-8i)}{36+64} = -0,18-0,24i.$$

Теперь получаем значение интеграла:

$$\int\limits_{|z+2i|=3}\left(\frac{\pi}{e^{\pi z/2}+1}+\frac{6\operatorname{ch}\dfrac{\pi i z}{2-2i}}{(z-2+2i)^2(z-4-2i)}\right)dz =$$

$$= 2\pi i\cdot(-2-0,18-0,24i) = \pi(0,48-4,36i).$$

Задачи 17 и 18.

Теорему Коши о вычетах можно применять и для вычисления интегралов от действительных функций.

При вычислении интегралов вида

$$\int\limits_0^{2\pi} R(\cos t,\sin t)\,dt, \tag{32}$$

где R — рациональная функция аргументов $\cos t$ и $\sin t$, ограниченная внутри промежутка интегрирования, используют следующий прием.

Полагаем $e^{it}=z$. Тогда

$$dt=\frac{dz}{iz},\quad \cos t=\frac{z^2+1}{2z},\quad \sin t=\frac{z^2-1}{2iz}. \tag{33}$$

при этом отрезок интегрирования $[0,2\pi]$ переходит в контур $C:|z|=1$ (единичная окружность с центром в нуле). Интеграл

(32) принимает вид

$$\int\limits_C F(z)\,dz,$$

который можно вычислить, используя теорему Коши о вычетах. В результате мы должны получить действительное число, т.к. исходный интеграл был действительным.

Отметим также одну особенность, связанную с определением характера особых точек рациональных функций. Если $f(z)$ — несократимая рациональная дробь, то ее особыми точками являются нули знаменателя. Они являются полюсами, порядок которых совпадает с порядком нуля знаменателя. Например, функция $f(z) = \dfrac{z^2+3z+6}{(z^2+1)^2 z^3}$ имеет полюс третьего порядка $z_0 = 0$ и два полюса второго порядка $z_{1,2} = \pm i$, т.к. $z^2+1 = (z-i)(z+i)$, а дробь, представляющая $f(z)$, несократима.

Пример 1. Вычислить интеграл

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{4\sqrt{2}\sin t + 6}.$$

Осуществляя замену по формулам (33), преобразуем подынтегральное выражение:

$$\frac{dt}{4\sqrt{2}\sin t+6} = \frac{dz}{iz\left(4\sqrt{2}\cdot\dfrac{z^2-1}{2iz}+6\right)} =$$

$$= \frac{dz}{2\sqrt{2}(z^2-1)+6iz} = \frac{dz}{2\sqrt{2}(z^2+\frac{3i}{\sqrt{2}}z-1)}$$

И нам теперь нужно вычислить интеграл

$$\int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{2\sqrt{2}(z^2+\frac{3i}{\sqrt{2}}z-1)}.$$

Т.к. подынтегральная функция $f(z)=\dfrac{1}{2\sqrt{2}(z^2+\dfrac{3i}{\sqrt{2}}z-1)}$ рациональна, то ее особые точки определяются легко. Решим уравнение

$$z^2+\frac{3i}{\sqrt{2}}z-1=0$$

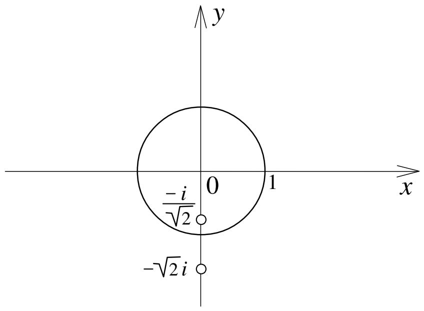

Рис. 17

Его корнями являются точки $z=\dfrac{-\frac{3i}{\sqrt{2}}\pm\frac{i}{\sqrt{2}}}{2}=-i\sqrt{2};-\dfrac{i}{\sqrt{2}}$. Эти точки являются полюсами первого порядка функции $f(z)$ Внутрь контура $|z|=1$ попадает лишь точка $z_1=-\dfrac{i}{\sqrt{2}}$. Так как $f(z)$ представима в виде

$$f(z)=\frac{1}{2\sqrt{2}(z+\dfrac{i}{\sqrt{2}})(z+i\sqrt{2})},$$

то вычет в точке $z_1=-\dfrac{i}{\sqrt{2}}$ равен

$$\operatorname{res} f(z_1)=\lim_{z\to-\frac{i}{\sqrt{2}}} f(z)\left(z+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)=$$

$$=\lim_{z\to-\frac{i}{\sqrt{2}}}\frac{1}{2\sqrt{2}(z+i\sqrt{2})}=\frac{1}{2\sqrt{2}\left(-\dfrac{i}{\sqrt{2}}+i\sqrt{2}\right)}=\frac{1}{2i}.$$

Получаем теперь

$$\int\limits_0^{2\pi}\frac{dt}{4\sqrt{2}\sin t+6}=2\pi i\cdot\frac{1}{2i}=\pi.$$

Пример 2. Вычислить интеграл

$$\int\limits_0^{2\pi}\frac{dt}{(\sqrt{5}+\sqrt{2}\cos t)^2}.$$

Выполняя ту же замену, получим

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{5}+\sqrt{2}\cos t)^2} = \int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{iz\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\cdot\dfrac{z^2+1}{2z}\right)^2} =$$

$$= \int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{iz\cdot\dfrac{1}{4z^2}(2\sqrt{5}z+\sqrt{2}z^2+\sqrt{2})^2} = \int\limits_{|z|=1} \frac{2zdz}{i(z^2+\sqrt{10}z+1)^2}.$$

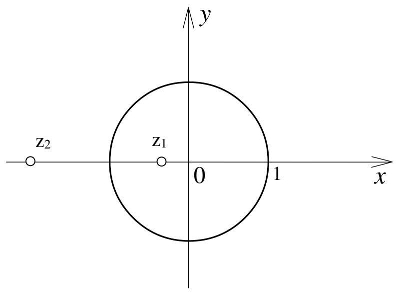

Рис. 18

Корнями знаменателя являются точки

$$z_{1,2} = -\sqrt{\frac{5}{2}} \pm \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Внутрь контура попадает только точка

$$z_1 = -\sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}},$$

которая является полюсом второго порядка.

Так как подынтегральную функцию можно представить в виде

$$f(z) = \frac{2z}{i(z-z_1)^2(z-z_2)^2},$$

то вычет в точке z_1 равен

$$\operatorname{res} f(z_1) = \lim_{z\to z_1} \frac{d}{dz}\left(\frac{2z}{i(z-z_2)^2}\right) =$$

$$= \lim_{z\to z_1} \frac{2}{i}\left(\frac{1}{(z-z_2)^2} - \frac{2z}{(z-z_2)^3}\right) = \frac{2}{i}\cdot\frac{-z_1-z_2}{(z_1-z_2)^3} =$$

$$= \frac{2}{i}\cdot\frac{\sqrt{\dfrac{5}{2}}-\sqrt{\dfrac{3}{2}}+\sqrt{\dfrac{5}{2}}+\sqrt{\dfrac{3}{2}}}{\left(-\sqrt{\dfrac{5}{2}}+\sqrt{\dfrac{3}{2}}+\sqrt{\dfrac{5}{2}}+\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)^3} = \frac{2}{i}\cdot\frac{\sqrt{10}}{(\sqrt{6})^3} = \frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{3}\,i}.$$

и тогда искомый интеграл равен

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{5}+\sqrt{2}\cos t)^2} = 2\pi i \cdot \frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{3}\,i} = \frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}\pi.$$

Задача 19.

Пусть $f(x)$ — рациональная функция, $f(x) = \dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ — многочлены, соответственно, степеней m и n. Если $f(x)$ непрерывна на всей действительной оси ($Q_n(x) \neq 0$), и $n \geqslant m+2$, т.е. степень знаменателя, по крайней мере, на две единицы больше степени числителя, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\substack{z_k \\ \operatorname{Im} z_k > 0}} \operatorname{res} f(z_k) \tag{34}$$

Справа стоит сумма вычетов функции $f(z)$ во всех полюсах z_k, расположенных в верхней полуплоскости.

Пример. Вычислить интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+16)}.$$

Решение. Степень числителя равна 0, а степень знаменателя равна 6. Функция $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)^2(x^2+16)}$ не имеет особенностей на действительной оси. Значит, для вычисления интеграла можно воспользоваться формулой (34).

В верхней полуплоскости $f(z)$ имеет полюс первого порядка $z_1 = 4i$ и полюс второго порядка $z_2 = i$.

Находим вычеты.

$z_1 = 4i$. Функцию $f(z)$ представим в виде

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2(z+4i)(z-4i)}.$$

Тогда

$$\operatorname{res} f(4i) = \lim_{z\to 4i} \frac{1}{(z^2+1)^2(z+4i)} = \frac{1}{(-16+1)^2(4i+4i)} = \\ = \frac{1}{225\cdot 8i} = \frac{1}{1800i}.$$

$z_2 = i$. Функцию $f(z)$ представим в виде

$$f(z) = \frac{1}{(z+i)^2(z-i)^2(z^2+16)}.$$

Тогда

$$\operatorname{res} f(i) = \lim_{z\to i} \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{(z+i)^2(z^2+16)}\right) = \\ = \lim_{z\to i}\left(\frac{-2}{(z+i)^3(z^2+16)} - \frac{2z}{(z+i)^2(z^2+16)^2}\right) = \\ = \frac{-2}{(2i)^3(-1+16)} - \frac{2i}{(2i)^2(-1+16)^2} = \frac{13}{900i}.$$

Отсюда получаем значение интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+16)} = 2\pi i\left(\frac{1}{1800i} + \frac{13}{900i}\right) = 0,03\pi.$$

Задача 20.

Пусть $f(x)$ — рациональная функция, $f(x) = \dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ — многочлены, соответственно, степеней m и n . И пусть $f(x)$ непрерывна на всей действительной оси ($Q_n(x) \neq 0$), и $n \geqslant m+1$, т.е. $f(x)$ — правильная рациональная дробь.

При вычислении интегралов вида

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\lambda x\,dx \tag{35}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\lambda x\,dx \tag{36}$$

удобно воспользоваться следующим приемом.

Рассматриваем функцию

$$g(z) = f(z)e^{i\lambda z},$$

находим сумму ее вычетов в особых точках, расположенных в верхней полуплоскости. Далее полученный результат умножаем на $2\pi i$. Действительная часть полученного выражения будет равна интегралу (35), а мнимая — интегралу (36), т.е. мы будем вычислять два интеграла одновременно. Формально это можно записать так:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\lambda x\,dx = \mathrm{Re}\left[2\pi i \sum_{\substack{z_k\\ \mathrm{Im}\,z_k>0}} \mathrm{res}_{z_k}(f(z)e^{i\lambda z})\right]$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\lambda x\,dx = \mathrm{Im}\left[2\pi i \sum_{\substack{z_k\\ \mathrm{Im}\,z_k>0}} \mathrm{res}_{z_k}(f(z)e^{i\lambda z})\right]$$

Пример 1. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos 2x}{(x^2+1)^2}\,dx.$$

Решение. Рассматриваем функцию

$$g(z) = \frac{ze^{2iz}}{(z^2+1)^2}.$$

Она имеет в верхней полуплоскости единственный полюс второго порядка $z_0 = i$. Находим

$$\operatorname{res} g(i) = \lim_{z\to i} \frac{d}{dz}\left(\frac{ze^{2iz}}{(z+i)^2}\right) = \lim_{z\to i}\left(\frac{e^{2iz}+2ize^{2iz}}{(z+i)^2} - \frac{2ze^{2iz}}{(z+i)^3}\right) =$$
$$= \frac{e^{-2}-2e^{-2}}{(2i)^2} + \frac{2ie^{-2}}{(2i)^3} = \frac{1}{2e^2}.$$

Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos 2x}{(x^2+1)^2}\,dx = \operatorname{Re}\left(2\pi i \frac{1}{2e^2}\right) = 0.$$

Тот же самый результат можно было бы получить, заметив, что $f(x) = \dfrac{x\cos 2x}{(x^2+1)^2}$ — нечетная функция. Однако, мы также нашли значение интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin 2x}{(x^2+1)^2}\,dx = \operatorname{Im}(\pi e^{-2} i) = \frac{\pi}{e^2}.$$

Пример 2. Вычислить интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2+x)\sin x}{x^4+13x^2+36}\,dx.$$

Решение. Рассматриваем функцию

$$g(z) = \frac{(z^2+z)e^{iz}}{z^4+13z^2+36} = \frac{(z^2+z)e^{iz}}{(z^2+4)(z^2+9)}.$$

Эта функция в верхней полуплоскости имеет два полюса первого порядка $z_1 = 2i$ и $z_2 = 3i$. Находим вычеты:

$$\operatorname{res} g(2i) = \lim_{z\to 2i} \frac{(z^2+z)e^{iz}}{(z+2i)(z^2+9)} = \frac{(-4+2i)e^{-2}}{4i\cdot(-4+9)} = \frac{(-2+i)e^{-2}}{10i}$$

$$\operatorname{res} g(3i) = \lim_{z\to 2i} \frac{(z^2+z)e^{iz}}{(z^2+4)(z+3i)} = \frac{(-9+3i)e^{-3}}{(-9+4)\cdot 6i} = \frac{(3-i)e^{-3}}{10i}$$

Тогда

$$2\pi i(\operatorname{res} g(2i) + \operatorname{res} g(3i)) = 2\pi i \left(\frac{(-2+i)e^{-2}}{10i} + \frac{(3-i)e^{-3}}{10i} \right) =$$

$$= \left(\frac{3}{5}e^{-3} - \frac{2}{5}e^{-2} \right)\pi + \frac{\pi}{5}\left(e^{-2} - e^{-3}\right) i.$$

Получаем значение интеграла

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2+x)\sin x}{x^4+13x^2+36}\, dx =$$

$$= \operatorname{Im}\left[\left(\frac{3}{5}e^{-3} - \frac{2}{5}e^{-2} \right)\pi + \frac{\pi}{5}\left(e^{-2} - e^{-3}\right) i \right] = \frac{\pi(e-1)}{5e^3}.$$

Задача 21.

Изображением функции $f(t)$ по Лапласу называется функция $F(p)$ комплексного переменного p, определяемая равенством

$$F(p) = \int\limits_{0}^{+\infty} f(t) e^{-pt}\, dt \tag{37}$$

Если $F(p)$ есть изображение $f(t)$, то символически будем обозначать это так:

$$f(t) \risingdotseq F(p)$$

Задачу 21 можно решить, воспользовавшись лишь определением изображения по Лапласу.

Можно использовать также известные свойства преобразования Лапласа. Перечислим их:

1) *Линейность*: для любых комплексных постоянных C_1 и C_2

$$C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t) \risingdotseq C_1 F_1(p) + C_2 F_2(p).$$

2) *Формула подобия*: для любого постоянного $\omega > 0$

$$f(\omega t) \risingdotseq \frac{1}{\omega} F\left(\frac{p}{\omega}\right).$$

3) *Дифференцирование оригинала*: если функции $f(t)$, $f'(t)$, $\ldots$, $f^{(n)}(t)$ являются функциями-оригиналами, то

$$\begin{gathered} f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0), \\ f''(t) \risingdotseq p^2 F(p) - pf(0) - f'(0), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f^{(n)}(t) \risingdotseq p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0). \end{gathered}$$

Величина $f^{(k)}(0)$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, понимается как $\lim\limits_{t\to+0} f^{(k)}(t)$.

4) *Дифференцирование изображения*:

$$F'(p) \fallingdotseq -tf(t).$$

5) *Интегрирование оригинала*:

$$\int\limits_0^t f(\tau)\, d\tau \risingdotseq \frac{F(p)}{p}.$$

6) *Интегрирование изображения*: если $\dfrac{f(t)}{t}$ является функцией-оригиналом, то

$$\int\limits_p^\infty F(p)\, dp \fallingdotseq \frac{f(t)}{t}.$$

7) *Формула смещения*: для любого комплексного λ

$$f(t)e^{-\lambda t} \risingdotseq F(p + \lambda).$$

8) *Формула запаздывания*:

$$f(t - \tau) \risingdotseq e^{-p\tau} F(p), \quad \tau > 0.$$

9) *Формула умножения изображений*:

$$F_1(p)F_2(p) \risingdotseq \int\limits_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,d\tau.$$

Теперь, чтобы найти изображение кусочно-линейной функции, можно воспользоваться этими свойствами и изображением функции Хэвисайда (единичного скачка)

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t \leqslant 0. \end{cases}$$

Изображением этой функции является функция

$$F(p) = \frac{1}{p}.$$

Очевидно, что

$$\varphi(t)\eta(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t > 0, \\ 0, & t \leqslant 0, \end{cases}$$

кроме того,

$$\eta(t-a) = \begin{cases} 1, & t > a, \\ 0, & t \leqslant a, \end{cases}$$

Пример 1. По данному графику оригинала найти изображение (рис. 19).

Решение. Запишем функцию $f(t)$ аналитически:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant a, \\ 2, & a < t \leqslant 2a, \\ 0, & 2a < t \leqslant 3a, \\ 3, & 3a < t \leqslant 4a, \\ 0, & t > 4a. \end{cases}$$

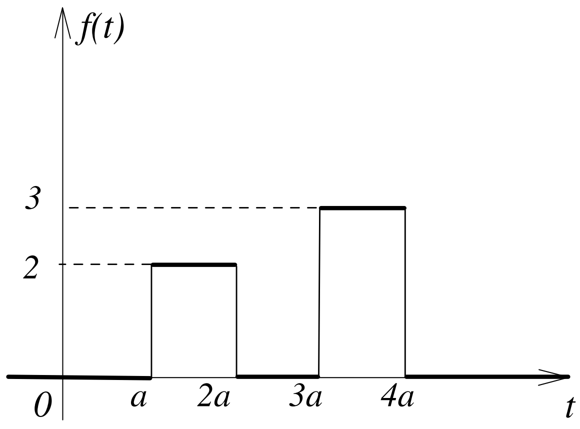

Рис.19

Теперь используем формулу (37):

$$F(p) = \int\limits_0^a 0 \cdot e^{-pt}\,dt + \int\limits_2^{2a} 2e^{-pt}\,dt + \int\limits_{2a}^{3a} 0 \cdot e^{-pt}\,dt +$$

$$+ \int\limits_{3a}^{4a} 3e^{-pt}\,dt + \int\limits_{4a}^{+\infty} 0 \cdot e^{-pt}\,dt = -\frac{2}{p} e^{-pt}|_a^{2a} - \frac{3}{p} e^{-pt}|_{3a}^{4a} =$$

$$= \frac{2}{p} e^{-ap} - \frac{2}{p} e^{-2ap} + \frac{3}{p} e^{-3ap} - \frac{3}{p} e^{-4ap}.$$

Пример 2. По данному графику оригинала найти изображение (рис. 20).

Решение. Запишем выражение для $f(t)$, используя функцию Хэвисайда $\eta(t)$

$$f(t) = \left(\frac{1}{a}t - 1\right)\eta(t) - \left(\frac{1}{a}t - 1\right)\eta(t-2a) + \left(3 - \frac{1}{a}t\right)\eta(t-2a) =$$

$$= \frac{1}{a}t\eta(t) - \eta(t) - \frac{1}{a}(t-2a)\eta(t-2a) - \eta(t-2a) -$$

$$-\frac{1}{a}(t-2a)\eta(t-2a)+\eta(t-2a)=$$

$$=\frac{1}{a}t\eta(t)-\eta(t)-\frac{2}{a}(t-2a)\eta(t-2a).$$

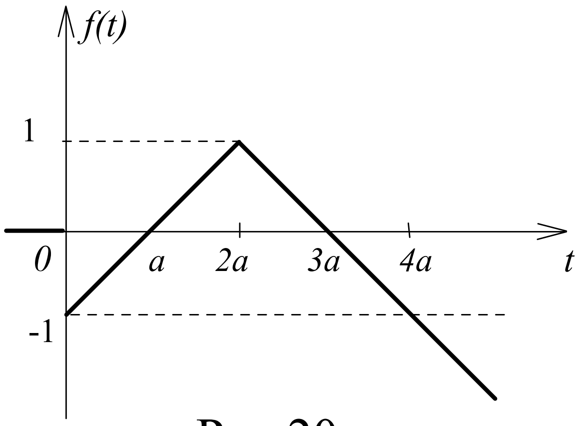

Рис.20

Теперь по формуле дифференцирования изображения

$$t\eta(t) \fallingdotseq -\left(\frac{1}{p}\right)' = \frac{1}{p^2}.$$

Кроме того, по формуле запаздывания

$$(t-2a)\eta(t-2a) \fallingdotseq \frac{1}{p^2}\cdot e^{-2ap}.$$

Теперь, в силу линейности, находим искомое изображение

$$F(p)=\frac{1}{ap^2}-\frac{1}{p}-\frac{2}{ap^2}e^{-2ap}.$$

Задача 22.

При отыскании оригинала по заданному изображению используют таблицы преобразований Лапласа и свойства, перечисленные выше. Выпишем фрагмент таблицы, достаточный для решения всех предложенных задач.

Оригинал $f(t)$	Изображение $F(p)$
1	$\frac{1}{p}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$e^{\lambda t}$	$\frac{1}{p-\lambda}$
$t^n e^{\lambda t}$	$\frac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
$\operatorname{sh} \omega t$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$
$\operatorname{ch} \omega t$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$
$e^{\lambda} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$
$e^{\lambda} \cos \omega t$	$\frac{p}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$
$e^{\lambda} \operatorname{sh} \omega t$	$\frac{\omega}{(p-\lambda)^2-\omega^2}$
$e^{\lambda} \operatorname{ch} \omega t$	$\frac{p}{(p-\lambda)^2-\omega^2}$
$t \sin \omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$
$t \cos \omega t$	$\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
$t \operatorname{sh} \omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2-\omega^2)^2}$
$t \operatorname{ch} \omega t$	$\frac{p^2+\omega^2}{(p^2-\omega^2)^2}$

При нахождении оригинала от дроби используют два приема:

1) разложение дроби в сумму простейших дробей. При этом разлагать можно как на дроби с действительными коэффициентами, так и на дроби с комплексными коэффициентами, в зависимости от ситуации и простоты такого разложения.

2) используют формулу разложения:

$$f(t) \risingdotseq \sum_k \operatorname{res}_{p_k} \left(F(p) e^{pt} \right), \tag{38}$$

где сумма вычетов берется по всем особым точкам p_k функции $F(p)$. Следует обратить внимание, что вычеты вычисляются не для функции $F(p)$, а для функции $G(p) = F(p)e^{pt}$.

Пример 1. Найти оригинал по заданному изображению:

$$F(p) = \frac{3p-2}{(p-1)(p^2-6p+10)}.$$

Решение. Разложим дробь в сумму простейших дробей:

$$\frac{3p-2}{(p-1)(p^2-6p+10)} = \frac{a}{p-1} + \frac{bp+c}{p^2-6p+10}.$$

Как обычно, приводим к общему знаменателю дроби, стоящие в правой части равенства. В числителе получим

$$a(p^2-6p+10) + (bp+c)(p-1) = 3p-2$$

или

$$(a+b)p^2 + (-6a-b+c)p + (10a-c) = 3p-2.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получаем систему:

$$\begin{cases} a+b=0, \\ -6a-b+c=3, \\ 10a-c=-2. \end{cases}$$

Решая ее, находим:

$$a = \frac{1}{5}, \quad b = -\frac{1}{5}, \quad c = 4.$$

Итак, разложение имеет вид:

$$F(p) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{p-1} + \frac{-\frac{1}{5}p + 4}{p^2 - 6p + 10}$$

Выделим полный квадрат в знаменателе:

$$p^2 - 6p + 10 = (p-3)^2 + 1.$$

Используя таблицу, находим:

$$\frac{p-3}{(p-3)^2+1} \risingdotseq e^{3t}\cos t,$$
$$\frac{1}{(p-3)^2+1} \risingdotseq e^{3t}\sin t,$$
$$\frac{1}{p-1} \risingdotseq e^{t}.$$

Теперь преобразуем $F(p)$ так, чтобы выделить явно эти выражения:

$$F(p) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{p-1} - \frac{1}{5} \cdot \frac{p-3}{(p-3)^2+1} + \frac{17}{5} \cdot \frac{1}{(p-3)^2+1}.$$

Тогда

$$f(t) = \frac{1}{5}e^{t} - \frac{1}{5}e^{3t}\cos t + \frac{17}{5}e^{3t}\sin t.$$

Пример 2. Найти оригинал по заданному изображению:

$$F(p) = \frac{1}{(p^2+4)^2}.$$

Решение. Используем формулу (38). Ищем вычеты функции

$$G(p) = \frac{e^{pt}}{(p^2+4)^2} = \frac{e^{pt}}{(p+2i)^2(p-2i)^2}.$$

Здесь имеются два полюса второго порядка: $p_1 = 2i$ и $p_2 = -2i$. Используем формулу (31) для нахождения вычетов:

$$\begin{aligned}\operatorname{res} G(p_1) &= \lim_{p\to 2i} \frac{d}{dt}\left(\frac{e^{pt}}{(p+2i)^2}\right) = \\ &= \lim_{p\to 2i} \frac{t(p+2i)^2 e^{pt} - 2(p+2i)e^{pt}}{(p+2i)^4} = \\ &= \frac{(-16t - 8i)e^{2it}}{256} = \left(-\frac{1}{16}t - \frac{1}{32}i\right) e^{2it}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{res} G(p_2) &= \lim_{p\to -2i} \frac{d}{dt}\left(\frac{e^{pt}}{(p-2i)^2}\right) = \\ &= \lim_{p\to -2i} \frac{t(p-2i)^2 e^{pt} - 2(p-2i)e^{pt}}{(p-2i)^4} = \\ &= \frac{(-16t + 8i)e^{-2it}}{256} = \left(-\frac{1}{16}t + \frac{1}{32}i\right) e^{-2it}.\end{aligned}$$

Складывая полученные выражения, находим:

$$\begin{aligned}f(t) &= \left(-\frac{1}{16}t - \frac{1}{32}i\right) e^{2it} + \left(-\frac{1}{16}t + \frac{1}{32}i\right) e^{-2it} = \\ &= -\frac{1}{8}t\frac{e^{2it} + e^{-2it}}{2} + \frac{1}{16}\cdot\frac{e^{2it} - e^{-2it}}{2i} = \\ &= -\frac{1}{8}t\cos 2t + \frac{1}{16}\sin 2t.\end{aligned}$$

Задача 23.

Рассмотрим задачу Коши для линейного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} a_n x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = f(t), \\ x(0) = x'(0) = \dots = x^{(n-1)}(0) = 0. \end{cases} \tag{39}$$

Для решения этой задачи решим сначала задачу Коши для уравнения

$$a_n x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = 1 \tag{40}$$

при тех же нулевых начальных условиях. Для решения задачи (40) удобно перейти к изображениям по Лапласу. Получим алгебраическое уравнение

$$(a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0)X_1(p) = \frac{1}{p},$$

где $X_1(p)$ - изображение решения уравнения (40) $x_1(t)$. Тогда

$$X_1(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}.$$

Заметим, что изображением для производной $x_1'(t)$ будет служить функция

$$x_1'(t) \risingdotseq \frac{1}{a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}.$$

По полученному изображению находим оригинал $x_1'(t)$. Теперь решение задачи Коши (39) можно найти по одной из формул Дюамеля:

$$x(t) = \int\limits_0^t x_1'(\tau) f(t-\tau)\, d\tau, \tag{41}$$

$$x(t) = \int\limits_0^t x_1'(t-\tau) f(\tau)\, d\tau, \tag{42}$$

Заметим, что в формулах Дюамеля (41) и (42) участвует только производная $x_1'(t)$, поэтому для решения задачи (39) нет необходимости находить функцию $x_1(t)$, достаточно знать лишь ее производную. Далее, следует сравнить, насколько сложны функции $f(t)$ и $x_1(t)$, и выбрать более простую из двух предложенных формул.

Пример. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} y'' + y' = \dfrac{1}{(1+e^t)^2}, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

Решение. Сначала решим уравнение

$$y_1'' + y_1' = 1$$

при нулевых начальных условиях.

Переходя к изображениям по Лапласу, получаем:

$$p^2 Y_1(p) + pY_1(p) = \frac{1}{p},$$

откуда

$$Y_1(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p^2 + p}.$$

Так как

$$\frac{1}{p^2 + p} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \risingdotseq 1 - e^{-t},$$

то

$$y_1'(t) = 1 - e^{-t}.$$

Теперь, применяя формулу Дюамеля (41), находим

$$y(t) = \int\limits_0^t \frac{1}{(1 + e^\tau)} \cdot \left(1 - e^{-(t-\tau)}\right) \, d\tau = \int\limits_0^t \frac{1 - e^{-t} e^\tau}{(1 + e^\tau)^2} \, d\tau.$$

Сделаем замену переменной $u = e^\tau$. Тогда $d\tau = \dfrac{du}{u}$, и при $\tau_1 = 0$ $u_1 = 1$, а при $\tau_2 = t$ $u_2 = e^t$. Тогда

$$y(t) = \int\limits_1^{e^t} \frac{1 - e^{-t} u}{(1 + u)^2} \cdot \frac{du}{u}.$$

Теперь обычным образом разложим дробь в сумму простейших дробей, чтобы проинтегрировать ее:

$$\frac{1 - e^{-t} u}{u(1 + u)^2} = \frac{a}{u} = \frac{b}{u+1} + \frac{c}{(u+1)^2},$$

$$a + u(2a + b + c) + u^2(a + b) = 1 - e^{-t} u$$

Получаем систему:

$$\begin{cases} a+b=0, \\ 2a+b+c=-e^{-t}, \\ a=1. \end{cases}$$

Решая ее, находим:

$$a=1, \quad b=-1, \quad c=-1-e^{-t}.$$

Тогда

$$y(t)=\int\limits_1^{e^t}\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u+1}-\frac{1+e^{-t}}{(u+1)^2}\right)du=$$
$$=\left[\ln|u|-\ln|u+1|+\frac{1+e^{-t}}{u+1}\right]\Bigg|_1^{e^t}=$$
$$=t-\ln(1+e^t)+e^{-t}-1+\ln 2.$$

Итак, нашли решение:

$$y(t)=t-1-\ln(1+e^t)+e^{-t}+\ln 2.$$

Задачи 24, 25, 26.

В этих задачах требуется решить задачу Коши либо для одного линейного уравнения с постоянными коэффициентами, либо для системы двух линейных уравнений первого порядка. Общий метод состоит в следующем:

1) Используя теорему о дифференцировании оригинала и начальные условия, применяем преобразование Лапласа к уравнению или системе. В результате получим алгебраическое уравнение или систему алгебраических уравнений.

2) Разрешаем алгебраические уравнения относительно неизвестных функций.

3) По полученному изображению находим оригинал, который и является решением исходной задачи Коши.

Пример 1. Операционным методом решить задачу Коши

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 2e^t \cos t/2, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Решение. Используя теорему о дифференцировании оригинала, находим:

$$y'(t) \risingdotseq pY(p) - y(0) = pY(p) - 1,$$
$$y''(t) \risingdotseq p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p) - p.$$

Кроме того, согласно таблице

$$2e^t \cos t/2 \risingdotseq 2\frac{p-1}{(p-1)^2 + \frac{1}{4}}.$$

Переходим в уравнении к изображениям по Лапласу

$$p^2Y(p) - p - 3pY(p) + 3 + 2Y(p) = 2\frac{p-1}{(p-1)^2 + \frac{1}{4}}$$
$$(p^2 - 3p + 2)Y(p) = \frac{2p-2}{p^2 - 2p + \frac{5}{4}} + p - 3.$$

Тогда

$$Y(p) = \frac{2p - 2 + p^3 - 2p^2 + \frac{5}{4}p - 3p^2 + 6p - \dfrac{15}{4}}{(p^2 - 2p + \dfrac{5}{4})(p^2 - 3p + 2)} =$$
$$= \frac{p^3 - 5p^2 + \frac{37}{4}p - \frac{23}{4}}{(p^2 - 2p + \dfrac{5}{4})(p-1)(p-2)}$$

Разложим дробь в сумму простейших:

$$\frac{p^3 - 5p^2 + \frac{37}{4}p - \frac{23}{4}}{(p^2 - 2p + \dfrac{5}{4})(p-1)(p-2)} = \frac{a}{p-2} + \frac{b}{p-1} + \frac{cp+d}{p^2 - 2p + \frac{5}{4}},$$

$$a(p-1)(p^2-2p+\frac{5}{4})+b(p-2)(p^2-2p+\frac{5}{4})+(cp+d)(p^2-3p+2)=$$
$$=p^3-5p^2+\frac{37}{4}p-\frac{23}{4},$$

$$p^3(a+b+c)+p^2(-3a-4b-3c+d)+p(\frac{13}{4}a+\frac{21}{4}b+2c-3d)+$$
$$+(\frac{5}{4}a-\frac{5}{2}b+d)=p^3-5p^2+\frac{37}{4}p-\frac{23}{4}.$$

Получаем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a+b+c=1, \\ -3a-4b-3c+d=-5, \\ \frac{13}{4}a+\frac{21}{4}b+2c-3d=\frac{37}{4}, \\ \frac{5}{4}a-\frac{5}{2}b+d=-\frac{23}{4}. \end{cases}$$

Ее решение: $a=3/5$, $b=2$, $c=-8/5$, $d=0$. Итак,

$$Y(p)=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{p-2}+\frac{2}{p-1}-\frac{8}{5}\cdot\frac{p}{(p-1)^2+\frac{1}{4}}.$$

Прибавляя и вычитая в числителе последней дроби 1, легко находим оригинал:

$$Y(p)=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{p-2}+\frac{2}{p-1}-\frac{8}{5}\cdot\frac{p-1}{(p-1)^2+\frac{1}{4}}-\frac{16}{5}\cdot\frac{1/2}{(p-1)^2+\frac{1}{4}}.$$

$$y(t)=\frac{3}{5}e^{2t}+2e^t-\frac{8}{5}e^t\cos\frac{t}{2}-\frac{16}{5}e^t\sin\frac{t}{2}.$$

Здесь стоит отметить, что для того, чтобы воспользоваться таблицей, нужно было, чтобы в числителе последней дроби стояла $1/2$. Этого добились, умножив и разделив дробь на 2.

Пример 2. Решить систему дифференциальных уравнений при заданных начальных условиях:

$$\begin{cases} \dot{x}=-x+3y+2, \\ \dot{y}=x+y+1, \\ x(0)=0, \\ y(0)=1. \end{cases}$$

Решение. С учетом начальных условий, перейдем в системе к изображениям по Лапласу. Стоит быть внимательными, так как в правой части есть дополнительные слагаемые, к которым тоже нужно применить преобразование Лапласа. Получаем систему:

$$\begin{cases} pX(p) = -X(p) + 3Y(p) + \dfrac{2}{p}, \\ pY(p) - 1 = X(p) + Y(p) + \dfrac{1}{p}. \end{cases}$$

Или:

$$\begin{cases} (p+1)X(p) - 3Y(p) = \dfrac{2}{p}, \\ -X(p) + (p-1)Y(p) = \dfrac{1}{p} + 1. \end{cases}$$

Из полученной системы нужно выразить функции $X(p)$ и $Y(p)$. Эта система линейна относительно $X(p)$ и $Y(p)$, поэтому удобно воспользоваться формулами Крамера. Вычисляем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} p+1 & -3 \\ -1 & p-1 \end{vmatrix} = p^2 - 1 - 3 = p^2 - 4,$$

$$\Delta_X = \begin{vmatrix} \frac{2}{p} & -3 \\ \frac{1}{p} + 1 & p-1 \end{vmatrix} = 2 - \frac{2}{p} + \frac{3}{p} + 3 = \frac{5p+1}{p},$$

$$\Delta_Y = \begin{vmatrix} p+1 & \frac{2}{p} \\ -1 & \frac{1}{p} + 1 \end{vmatrix} = 1 + \frac{1}{p} + p + 1 + \frac{2}{p} = \frac{p^2 + 2p + 3}{p}.$$

Получаем:

$$X(p) = \frac{\Delta_X}{\Delta} = \frac{5p+1}{p(p-2)(p+2)},$$

$$Y(p) = \frac{\Delta_Y}{\Delta} = \frac{p^2 + 2p + 3}{p(p-2)(p+2)}$$

Теперь от полученных выражений нужно перейти в оригиналам. Используем для этого формулу разложения (38). Заметим, что особые точки функций $X(p)$ и $Y(p)$ — это полюса перdого порядка $P_1 = 0$, $p_2 = 2$, $p_3 = -2$. Теперь легко найти вычеты по формуле (30):

$$\begin{aligned}
\mathrm{res}_0(X(p)e^{pt}) &= \lim_{p\to 0}\frac{5p+1}{(p-2)(p+2)}e^{pt} = -\frac{1}{4},\\
\mathrm{res}_2(X(p)e^{pt}) &= \lim_{p\to 2}\frac{5p+1}{p(p+2)}e^{pt} = \frac{11}{8}e^{2t},\\
\mathrm{res}_{-2}(X(p)e^{pt}) &= \lim_{p\to -2}\frac{5p+1}{p(p-2)}e^{pt} = -\frac{9}{8}e^{-2t}.
\end{aligned}$$

Получили, что

$$x(t) = -\frac{1}{4} + \frac{11}{8}e^{2t} - \frac{9}{8}e^{-2t}.$$

Аналогично для функции $Y(p)$ получаем:

$$\begin{aligned}
\mathrm{res}_0(Y(p)e^{pt}) &= \lim_{p\to 0}\frac{p^2+2p+3}{(p-2)(p+2)}e^{pt} = -\frac{3}{4},\\
\mathrm{res}_2(Y(p)e^{pt}) &= \lim_{p\to 2}\frac{p^2+2p+3}{p(p+2)} = \frac{11}{8}e^{2t},\\
\mathrm{res}_{-2}(Y(p)e^{pt}) &= \lim_{p\to -2}\frac{p^2+2p+3}{p(p-2)}e^{pt} = \frac{3}{8}e^{-2t}.
\end{aligned}$$

Тогда

$$y(t) = -\frac{3}{4} + \frac{11}{8}e^{2t} + \frac{3}{8}e^{-2t}.$$

Итак, решение исходной задачи имеет вид:

$$\begin{cases} x(t) = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{11}{8}e^{2t} - \dfrac{9}{8}e^{-2t},\\[2mm] y(t) = -\dfrac{3}{4} + \dfrac{11}{8}e^{2t} + \dfrac{3}{8}e^{-2t}. \end{cases}$$